УДК 531.01

© 1999 г. В.В. Румянцев

О ФОРМАХ ПРИНЦИПА ГАМИЛЬТОНА В КВАЗИКООРДИНАТАХ

Для общего случая нелинейных неголономных связей были проанализированы [1] условия вывода в обобщенных координатах и скоростях трех форм принципа Гамильтона, принадлежащих, соответственно, Гёльдеру, Воронцу и Суслову, и было показано, что эти три формы равносильны и преобразуются одна в другую. В продолжение этого анализа аналогичные вопросы исследуются для случая нелинейных квазикоординат и квазискоростей и, кроме того, дается вид этих форм принципа Гамильтона при преобразовании Лежандра, приводящего уравнения движения к каноническому виду в квазикоординатах.

1. Сначала рассмотрим голономную систему с лагранжевыми координатами q_i и скоростями $\dot q_i$, находящуюся под действием сил с силовой функцией $U(t, q_1,...,q_n)$, и произвольные независимые гладкие функции

$$\eta_i \equiv f_i(t,q,\dot q) \tag{1.1}$$

в общем случае нелинейные по обобщенным скоростям, такие, что $\det(\partial f_i/\partial \dot q_j)\neq 0$. Здесь и всюду далее в разд. 1 индексы i, j, r, s принимают значения $1,..., n$.

Разрешая соотношения (1.1), находим выражения

$$\dot q_i = F_i(t,q,\eta) \tag{1.2}$$

подстановка которых обращает равенства (1.1) в тождества.

Очевидно, справедливы соотношения

$$f_{si}F_{ir} = \delta_{sr},\quad f_{ir}F_{si} = \delta_{rs} \tag{1.3}$$

где и далее по повторяющимся индексам производится суммирование, причем $f_{si} \equiv \partial f_s/\partial \dot q_i$, $F_{ir} \equiv \partial F_i/\partial \eta_r$; δ_{sr} – символ Кронекера.

Следуя Гамелю [2], примем условные обозначения $\dot\pi_s = \eta_s$, где π_s и η_s – нелинейные квазикоординаты и квазискорости, а также

$$\frac{\partial}{\partial \pi_s} \equiv F_{is}\frac{\partial}{\partial q_i},\quad \frac{\partial}{\partial q_i} = f_{si}\frac{\partial}{\partial \pi_s} \tag{1.4}$$

причем виртуальные перемещения в лагранжевых координатах и квазикоординатах связаны соотношениями

$$\delta q_i \equiv F_{is}\delta\pi_s,\quad \delta\pi_s \equiv f_{si}\delta q_i \tag{1.5}$$

Подставив в функцию Лагранжа $L(t,q,\dot q) = T(t,q,\dot q) + U(t,q)$, где $T(t,q,\dot q)$ – кинетическая энергия системы, выражения (1.2), получим функцию $L^*(t,q,\eta)$, с помощью которой принцип Даламбера–Лагранжа принимает в квазикоординатах вид

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} + \frac{\partial L^*}{\partial \eta_r}W_s^r - \frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}\right)\delta\pi_s = 0 \tag{1.6}$$

или вид

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \eta_s}-\frac{\partial L^*}{\partial \eta_r}f_{ri}T_s^i-\frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}\right)\delta\pi_s=0 \tag{1.7}$$

где использованы обозначения [3]

$$W_s^r \equiv F_{is}\left(\frac{df_{ri}}{dt}-\frac{\partial f_r}{\partial q_i}\right),\ T_s^i \equiv \frac{dF_{is}}{dt}-\frac{\partial F_i}{\partial \pi_s} \tag{1.8}$$

Вследствие произвольности $\delta\pi_s$ из (1.6) или (1.7) следуют уравнения движения под действием потенциальных сил голономной системы в квазикоординатах в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \eta_s}+\frac{\partial L^*}{\partial \eta_r}W_s^r-\frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}=0 \tag{1.9}$$

или в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \eta_s}-\frac{\partial L^*}{\partial \eta_r}f_{ri}T_s^i-\frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}=0 \tag{1.10}$$

Уравнения вида (1.9) и (1.10) были выведены впервые Гамелем [2] из центрального уравнения Лагранжа с помощью установленных им в предположении $d\delta q_i = \delta dq_i$ уравнений транзитивности

$$\frac{d\delta\pi_s}{dt}-\delta\eta_s = W_r^s\delta\pi_r \ \text{ и } \ \frac{d\delta\pi_s}{dt}-\delta\eta_s=-\frac{\partial\eta_s}{\partial\dot q_i}T_r^i\delta\pi_r \tag{1.11}$$

и названы первой и второй формами уравнений движения, соответственно. При этом Гамель отметил, что уравнения (1.9) имеют тот недостаток, что при вычислении коэффициентов W_s^r появляются $\dot q_i$ и $\ddot q_i$; в уравнениях (1.10) фигурируют функции f_{ri}, зависящие от $\dot q_j$, которые можно выразить через функции, зависящие от q_i и η_s. Уравнения (1.10) явились естественным обобщением ранее выведенных Гамелем уравнений Лагранжа–Эйлера в линейных квазикоординатах [2].

В.С. Новоселов [3] вывел уравнения (1.9) и (1.10) (с заменой в последних множителей $(\partial L^*/\partial\eta_r)f_{ri}$ на $\partial L/\partial\dot q_i$) также с помощью уравнений транзитивности (1.11) из принципа Гамильтона

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L^* dt = 0,\ \ \delta\pi_s\big|_{t_0}=\delta\pi_s\big|_{t_1}=0 \tag{1.12}$$

и назвал их уравнениями типа Воронца–Гамеля и типа Чаплыгина, соответственно.

Эти же уравнения были выведены [4] из уравнений Маджи без использования уравнений (1.11).

Отметим, что уравнения (1.9) или (1.10) приводят, в свою очередь, к принципу Гамильтона (1.12): для этого надо умножить их на $\delta\pi_s$, просуммировать по s, результат проинтегрировать по t от t_0 до t_1 и с учетом (1.11) получить (1.12).

Уравнения (1.9) и (1.10) с помощью преобразования Лежандра [5]

$$y_s=\frac{\partial L^*}{\partial \eta_s},\ \ H^*(t,q,y)=y_s\eta_s-L^*(t,q,\eta) \tag{1.13}$$

были приведены [4] к виду канонических уравнений в квазикоординатах

$$\frac{dy_s}{dt}+y_rW_s^r+\frac{\partial H^*}{\partial \pi_s}=0,\ \ \eta_s=\frac{\partial H^*}{\partial y_s} \tag{1.14}$$

или

$$\frac{dy_s}{dt} - y_r f_{ri} T_s^i + \frac{\partial H^*}{\partial \pi_s} = 0, \quad \eta_s = \frac{\partial H^*}{\partial y_s} \tag{1.15}$$

Коэффициенты W_s^r и T_s^r этих уравнений следует выразить через y_r с помощью соотношений (1.1), (1.2) и (1.13).

Уравнения (1.14) или (1.15) позволяют получить вторую форму принципа Гамильтона. В самом деле, умножим первую группу уравнений (1.14) или (1.15) на $\delta\pi_s$, вторую группу на $-\delta y_s$, просуммируем по всем s, результат проинтегрируем по t, учитывая (1.11), и, полагая $\delta\pi_s = 0$ при $t = t_0$, t_1, получим

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left(\left(\frac{dy_s}{dt} + y_r W_s^r + \frac{\partial H^*}{\partial \pi_s} \right) \delta\pi_s - \left(\eta_s - \frac{\partial H^*}{\partial y_s} \right) \delta y_s \right) dt =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} \left(y_s \left(\frac{d\delta\pi_s}{dt} - W_r^s \delta\pi_r \right) + \eta_s \delta y_s - \delta H^* \right) dt = -\delta \int_{t_0}^{t_1} (y_s \eta_s - H^*) dt$$

Таким образом, доказана справедливость для голономной системы второй формы принципа Гамильтона в квазикоординатах

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (y_s \eta_s - H^*) dt = 0, \quad \delta\pi_s \big|_{t_0} = \delta\pi_s \big|_{t_1} = 0 \tag{1.16}$$

В свою очередь уравнения (1.14) и (1.15) можно вывести из принципа (1.16). Следует отметить, что принцип (1.16) имеет самостоятельное значение из-за предположения о произвольности и независимости вариаций δy_s от виртуальных перемещений $\delta\pi_s$ внутри интервала (t_0, t_1) [5].

2. Обратимся теперь к неголономной системе с k степенями свободы, стесненной нелинейными связями вида

$$\eta_\alpha \equiv f_\alpha(t, q, \dot{q}) = 0, \ \mathrm{rank}(f_{\alpha i}) = n - k \tag{2.1}$$

$$i = 1, \ldots, n; \ \alpha = k + 1, \ldots, n$$

Введем в рассмотрение произвольные квазискорости

$$\eta_s = \frac{d\pi_s}{dt} \equiv f_s(t, q, \dot{q}), \quad s = 1, \ldots, k \tag{2.2}$$

такие, что $\det(f_{si}) \neq 0$ $(i, s = 1, \ldots, n)$, так что равенства (2.1), (2.2) позволяют получить выражения вида (1.2). Виртуальные перемещения неголономной системы определим условиями Четаева

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = 0, \quad \alpha = k + 1, \ldots, n \tag{2.3}$$

Для виртуальных перемещений по-прежнему будем иметь соотношения (1.5), но лишь для $s = 1, \ldots, k$, так как при связях (2.1) согласно (2.3) имеем $\delta\pi_\alpha = 0$ $(\alpha = k + 1, \ldots, n)$, тогда как величины $\delta\pi_s$ $(s = 1, \ldots, k)$ будут произвольными. Из принципа Даламбера–Лагранжа (1.6) или (1.7) следуют при этом уравнения движения неголономной системы в квазикоординатах вида (1.9) и (1.10), но лишь для $s = 1, \ldots, k$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} + \frac{\partial L^*}{\partial \eta_r} W_s^r - \frac{\partial L^*}{\partial \pi_s} = 0, \quad \eta_\alpha = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \eta_s}-\frac{\partial L^*}{\partial \eta_r}f_{ri}T_s^i-\frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}=0,\ \ \eta_\alpha=0 \tag{2.5}$$

$s=1,..., k;\ \alpha=k+1,...,n;\ i, r=1,..., n$

Полагать $\eta_\alpha = 0$ в этих уравнениях можно лишь после их составления в явном виде, так как в них фигурируют, вообще говоря, все $\partial L^*/\partial \eta_r$ ($r = 1,..., n$).[1]

Первые k обеих групп уравнений транзитивности (1.11) сохраняют свой вид при условии, что в их правых частях $\delta\pi_r = 0$ для $r = k + 1,..., n$, а остальные уравнения принимают вид [3]

$$\delta\eta_\alpha=-W_r^\alpha\delta\pi_r \text{ и } \delta\eta_\alpha=\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial\dot{q}_i}T_r^i\delta\pi_r \tag{2.6}$$

$r=1,..., k;\ \alpha=k+1,..., n;\ i=1,..., n$

Аналогично канонические уравнения движения имеют вид первых k пар уравнений (1.14) и (1.15), т.е. для $s = 1,..., k$, к которым должны быть присоединены уравнения связей (2.1), переписанные в виде

$$\partial H^*/\partial y_\alpha=0,\ \ \alpha=k+1,...,n \tag{2.7}$$

Для неголономной системы принцип Гамильтона в виде (1.12) или (1.16) в общем случае места не имеет, так как окольные пути не удовлетворяют уравнениям связей (2.1) [1,6], однако он справедлив в форме Гёльдера

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L^* dt=0,\ \ \delta\pi_s\Big|_{t_0}=\delta\pi_s\Big|_{t_1}=0,\ \ s=1,...,k \tag{2.8}$$

а также в соответствующей ему второй форме

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta(y_s\eta_s-H^*)dt=0,\ \ \delta\pi_s\Big|_{t_0}=\delta\pi_s\Big|_{t_1}=0,\ \ s=1,...,k \tag{2.9}$$

Перейдем к выводу уравнений Воронца в квазикоординатах, в которых фигурируют члены, зависящие от кинетической энергии неголономной системы [7]. С этой целью заменим входящую в функцию $L^*(t,q,\eta)$ в уравнениях (2.4) и (2.5) кинетическую энергию $T^*(t,q,\eta)$ голономной системы на кинетическую энергию $\Theta^*(t,q,\eta_1,..., \eta_k)$ неголономной системы со связями (2.1). Так как при $\eta_\alpha = 0$ ($\alpha = k + 1,..., n$) справедливы соотношения [8]

$$\frac{\partial L^*}{\partial \eta_s}=\frac{\partial \Theta^*}{\partial \eta_s},\ \ \frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}=\frac{\partial(\Theta^*+U)}{\partial \pi_s},\ \ \frac{\partial L^*}{\partial \eta_\alpha}=\left(\frac{\partial T^*}{\partial \eta_\alpha}\right)_0;\ \ s=1,...,k;\ \ \alpha=k+1,...,n \tag{2.10}$$

где

$$\left(\frac{\partial T^*}{\partial \eta_\alpha}\right)_0=\frac{\partial T^*}{\partial \eta_\alpha}\Big|_{\eta_\beta=0},\ \ \beta=k+1,...,n$$

то первые k уравнений (2.4) и (2.5) можно представить в виде уравнений Воронца в квазикоординатах

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta^*}{\partial \eta_s}-\frac{\partial(\Theta^*+U)}{\partial \pi_s}+\left(\frac{\partial T^*}{\partial \eta_i}\right)_0 W_s^i=0,\ \ s=1,...,k;\ \ i=1,...,n \tag{2.11}$$

[1] Пользуясь случаем, исправляю опечатки в работе [4]: на с. 538 в 11 строке сверху вместо $r, s = 1,..., k$ должны быть $s = 1,..., k$; в 13 строке сверху вместо (1) и (11) должны быть (I) и (II).

и

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta^*}{\partial\eta_s}-\frac{\partial(\Theta^*+U)}{\partial\pi_s}-\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\right)^* T_s^i=0,\ \ s=1,\ldots,k;\ \ i=1,\ldots,n \tag{2.12}$$

причем $(\partial T/\partial\dot q_i)^*$ означает результат замены $\dot q_i$ соотношениями (1.2) в выражении $\partial T/\partial\dot q_i$ $(i = 1,\ldots, n)$.

Уравнения (2.11) и (2.12) приводят к форме Воронца принципа Гамильтона для неголономной системы в виде

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta(\Theta^*+U)-\left(\frac{\partial T^*}{\partial\eta_\alpha}\right)_0 W_s^\alpha\delta\pi_s\right)dt=0,\ \ \delta\pi_s\Big|_{t_0}=\delta\pi_s\Big|_{t_1}=0 \tag{2.13}$$

или в виде

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta(\Theta^*+U)+\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\right)^* T_s^i\delta\pi_s\right)dt=0,\ \ \delta\pi_s\Big|_{t_0}=\delta\pi_s\Big|_{t_1}=0 \tag{2.14}$$

В свою очередь уравнения (2.11) или (2.12) можно получить из (2.13) или (2.14) [6], соответственно.

С помощью преобразования Лежандра

$$y_s=\frac{\partial\Theta^*}{\partial\eta_s},\ \ H^*(t,q,y)=y_s\eta_s-\Theta^*(t,q,\eta)-U(t,q),\ \ s=1,\ldots,k \tag{2.15}$$

при условии $\left\|\partial^2\Theta^*/\partial\eta_r\partial\eta_s\right\|\neq 0$ $(r,s = 1,\ldots, k)$ уравнения (2.11) и (2.12) приводятся к виду канонических уравнений в квазикоординатах

$$\frac{dy_s}{dt}+\frac{\partial H^*}{\partial\pi_s}+\left(\frac{\partial T^*}{\partial\eta_i}\right)_0 W_s^i=0,\ \ \eta_s=\frac{\partial H^*}{\partial y_s} \tag{2.16}$$

и

$$\frac{dy_s}{dt}+\frac{\partial H^*}{\partial\pi_s}-\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_1}\right)^* T_s^i=0,\ \ \eta_s=\frac{\partial H^*}{\partial y_s} \tag{2.17}$$

Уравнения (2.16) или (2.17) позволяют получить вторую форму Воронца принципа Гамильтона в виде

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta(y_s\eta_s-H^*)-\left(\frac{\partial T^*}{\partial\eta_\alpha}\right)_0 W_s^\alpha\delta\pi_s\right)dt=0,\ \ \delta\pi_s\Big|_{t_0}=\delta\pi_s\Big|_{t_1}=0 \tag{2.18}$$

или в виде

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta(y_s\eta_s-H^*)+\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\right)^* T_s^i\delta\pi_s\right)dt=0,\ \ \delta\pi_s\Big|_{t_0}=\delta\pi_s\Big|_{t_1}=0 \tag{2.19}$$

$s = 1,\ldots, k$; $i = 1,\ldots, n$; $\alpha = k + 1,\ldots, n$.

Используя соотношения (2.10), нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$\delta L^*=\delta(\Theta^*+U)-\left(\frac{\partial T}{\partial\eta_\alpha}\right)_0^* W_s^\alpha\delta\pi_s=\delta(\Theta^*+U)+\left(\frac{\partial T^*}{\partial\dot q_i}\right)T_s^i\delta\pi_s \tag{2.20}$$

доказывающих эквивалентность форм Воронца формам Гёльдера принципа Гамильтона в квазикоординатах для неголономной системы.

В заключение рассмотрим важный частный случай неголономных связей (2.1), разрешенных относительно некоторых обобщенных скоростей. Пусть связи (2.1) заданы в виде [1]

$$\eta_\alpha \equiv f_\alpha(t,q,\dot q) = \dot q_\alpha - \varphi_\alpha(t,q,\dot q_1,\ldots,\dot q_k) = 0 \tag{2.21}$$

За параметры η_s примем независимые скорости $\dot q_s$

$$\eta_s = \dot q_s \tag{2.22}$$

Здесь и далее $\alpha = k+1,\ldots, n$; $s = 1,\ldots, k$.

В этом случае уравнения (2.6) превращаются в уравнения [1]

$$\delta\eta_\alpha = \delta\dot q_\alpha - \delta\varphi_\alpha = A_s^\alpha \delta q_s \tag{2.23}$$

а первые k уравнений транзитивности (1.11) становятся тождествами, так как

$$W_r^s = -\frac{\partial\eta_s}{\partial\dot q_i}T_r^i = 0,\quad r = 1,\ldots,k$$

причем

$$A_s^\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\dot q_s} - \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial q_s} - \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial q_\beta}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot q_s},\quad \beta = k+1,\ldots,n \tag{2.24}$$

Уравнения Воронца (2.11) принимают вид [7,1]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot q_s} - \frac{\partial(\Theta+U)}{\partial q_s} - \frac{\partial(\Theta+U)}{\partial q_\alpha}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\dot q_s} - \frac{\partial T}{\partial\dot q_a}A_s^\alpha = 0 \tag{2.25}$$

Здесь $\Theta(t,q,\dot q_1,\ldots,\dot q_k)$ – кинетическая энергия неголономной системы в обобщенных скоростях, в которую переходит кинетическая энергия голономной системы $T(t,q,\dot q)$ при учете связей (2.21). Уравнения (2.25) выведены Воронцом [7] из принципа Гамильтона в форме Воронца[2]

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta(\Theta+U) + \frac{\partial T}{\partial\dot q_\alpha}(\delta\dot q_\alpha - \delta\varphi_\alpha)\right)dt = 0,\quad \delta q_s\big|_{t_0} = \delta q_s\big|_{t_1} = 0 \tag{2.26}$$

эквивалентного форме Гёльдера в силу равенства (2.20), принимающего в обобщенных координатах и скоростях вид [1]

$$\delta T = \delta\Theta + \frac{\partial T}{\partial\dot q_\alpha}(\delta\dot q_\alpha - \delta\varphi_\alpha) \tag{2.27}$$

С помощью преобразования Лежандра

$$p_s = \frac{\partial\Theta}{\partial\dot q_s},\quad H(t,q,p) = p_s\dot q_s - \Theta(t,q,\dot q_s) - U(t,q)$$

уравнения (2.25) приводятся к виду канонических уравнений

$$\frac{dp_s}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_s} + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\dot q_s}\right)^* - \left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_\alpha}A_s^\alpha\right)^* = 0,\quad \frac{\partial q_s}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_s} \tag{2.28}$$

где $(\psi)^*$ означает выражение ψ через p_s.

---

[2] Отметим, что эквивалентная (2.26) формула (51) и разд. 6 [6] неправильно названы принципом Суслова: последний имеет вид (2.31) (см. ниже).

Уравнения (2.28) приводят ко второй форме Воронца принципа Гамильтона в обобщенных координатах и импульсах

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta(p_s\dot{q}_s - H) + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} A_s^\alpha\right)^* \delta q_s\right)dt = 0, \quad \delta q_s\Big|_{t_0} = \delta q_s\Big|_{t_1} = 0 \tag{2.29}$$

Гёльдер и Воронец принимали $\delta d q_i = d\delta q_i$ $(i = 1,..., n)$. Согласно другой точке зрения, принадлежащей Аппелю и Суслову [9], такие соотношения имеют место лишь для $i = 1,..., k$, а для $\alpha = k + 1,..., n$ имеют место соотношения

$$\frac{d}{dt}\delta q_\alpha - \bar{\delta}\dot{q}_\alpha = A_s^\alpha \delta q_s \tag{2.30}$$

где $\bar{\delta}$ означает вариацию в смысле Аппеля – Суслова, что приводит к форме Суслова принципа Гамильтона [9, 1]

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\bar{\delta}L + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} A_s^\alpha \delta q_s\right)dt = 0, \quad \delta q_s\Big|_{t_0} = \delta q_s\Big|_{t_1} = 0 \tag{2.31}$$

Так как при условиях (2.30) равенство (2.27) принимает вид $\bar{\delta}T = \delta\Theta$, то очевидно, что (2.31) приводится к виду (2.26) формы Воронца принципа Гамильтона.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00261) и Федеральной целевой программы "Интеграция".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В.В.* О принципе Гамильтона для неголономных систем // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 387–399.
2. *Hamel G.* Theoretische Mechanik. Berlin: Springer, 1949. 796 p.
3. *Новоселов В.С.* Вариационные методы в механике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966. 71 с.
4. *Румянцев В.В.* К уравнениям Пуанкаре и Четаева // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 4. С. 531–538.
5. *Четаев Н.Г.* Уравнения Пуанкаре // Теоретическая механика. М.: Наука, 1987. С. 287–322.
6. *Papastavridis J.G.* Time-integral variational principles for nonlinear nonholonomic systems // Journal of Applied Mechanics. December 1997. V. 64. P. 985–991.
7. *Воронец П.В.* Об уравнениях движения для неголономных систем // Матем. сб. 1901. Т. 22. Вып. 4. С. 659–686.
8. *Румянцев В.В.* Об уравнениях Пуанкаре – Четаева // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 3–16.
9. *Суслов Г.К.* Об одном видоизменении начала Даламбера // Матем. сб. 1901. Т. 32. Вып. 4. С. 687–691.

Москва

Поступила в редакцию
3.IX.1998