УДК 531.381

В. В. Румянцев (Москва)

ОБ УРАВНЕНИЯХ ПУАНКАРЕ И ЧЕТАЕВА В ПАРАМЕТРАХ РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА

Большой цикл работ В.Н. Кошлякова посвящен применению параметров Родрига–Гамильтона, а также параметров Кэйли–Клейна в динамике твердого тела и в теории гироскопических систем. В частности, в работах [1, 2] и монографии [3] дан вывод уравнений движения тяжелого твердого тела в этих параметрах, образующих системы дифференциальных уравнений восьмого порядка.

В данной работе уравнения движения твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона получены как частные случаи уравнений Пуанкаре и Четаева, теория интегрирования которых [4] тем самым распространяется на полученные системы уравнений седьмого порядка, представляющие собою, как и в классическом случае, совокупности кинематических и динамических уравнений, аналогичных уравнениям Эйлера. Эти системы дифференциальных уравнений выражены также в параметрах Кэйли–Клейна.

1. Как известно [4], уравнения Пуанкаре движения голономной системы с k степенями свободы имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} = \sum_{m,r=1}^{k} c_{rs}^m \frac{\partial L^*}{\partial \eta_m}\eta_r + X_s L^*, \quad s = 1,\ldots,k, \tag{1}$$

где $x_1,\ldots,x_n$ — определяющие координаты ($n \geq k$), через которые радиусы-векторы точек системы выражаются в виде $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(t, x_1,\ldots,x_n)$; $\eta_1,\ldots,\eta_k$ — параметры действительных перемещений; $L^*(t,x,\eta) = T(t,x,\eta) + U(t,x)$ — обобщенная функция Лагранжа, $T(t,x,\eta)$ — кинетическая энергия, $U(t,x)$ — силовая функция; $X_1,\ldots,X_k$ — группа Ли линейных операторов с коммутатором

$$[X_r, X_s]f \equiv X_r X_s f - X_s X_r f = \sum_{m=1}^{k} c_{rs}^m X_m f; \tag{2}$$

c_{rs}^m — структурные постоянные группы Ли; $\left\|\dfrac{\partial^2 L^*}{\partial\eta_r\partial\eta_s}\right\| \neq 0$.

С помощью преобразования Лежандра

$$Y_s = \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s}, \quad H^*(t, x, y) = \sum_{s=1}^{k} y_s\eta_s - L^* \tag{3}$$

уравнения (1) приводятся к виду канонических уравнений Четаева [4]

$$\frac{dy_s}{dt} = \sum_{m,r=1}^{k} c_{rs}^m y_m \frac{\partial H^*}{\partial y_r} - X_s H^*, \quad \eta_s = \frac{\partial H^*}{\partial y_s}, \quad s = 1, \ldots, k. \tag{4}$$

Второй группе канонических уравнений (4) можно придать другой вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial H^*}{\partial y_s} X_s x_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Уравнения (4), (5) представимы в виде [5]

$$\frac{dy_s}{dt} = (y_s, H^*), \quad \frac{dx_i}{dt} = (x_i, H^*), \quad s = 1, \ldots, k; \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

т.е. они являются уравнениями гамильтонова типа в неканонических переменных x_i, y_s, где обобщенная скобка Пуассона двух гладких функций $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ определяется равенством [4, 5]

$$(f, \varphi) = \sum_{s=1}^{k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_s} X_s f - \frac{\partial f}{\partial y_s} X_s \varphi \right) + \sum_{s,r,m=1}^{k} c_{sr}^m \frac{\partial f}{\partial y_r} \frac{\partial \varphi}{\partial y_s} y_m. \tag{7}$$

2. Рассмотрим тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой O, которую примем за начала неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$ с вертикально вверх направленной осью $O\zeta$ и подвижной системы координат $Oxyz$, жестко связанной с телом, оси которой направлены по главным осям инерции тела для точки O.

Положение тела в пространстве будем определять параметрами Родрига–Гамильтона λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, связанными соотношением [6]

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1, \tag{8}$$

которые выражаются через углы Эйлера θ, ψ, φ формулами

$$\lambda_0 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2},$$

$$\lambda_2 = \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}.$$

Очевидно, эти параметры можно принять за определяющие координаты системы.

Проекции p, q, r мгновенной угловой скорости тела на оси x, y, z имеют вид [1, 3]

$$\begin{gathered} p = 2(\lambda_0\dot\lambda_1 - \lambda_1\dot\lambda_0 + \lambda_3\dot\lambda_2 - \lambda_2\dot\lambda_3), \\ q = 2(\lambda_0\dot\lambda_2 - \lambda_2\dot\lambda_0 + \lambda_1\dot\lambda_3 - \lambda_3\dot\lambda_1), \\ r = 2(\lambda_0\dot\lambda_3 - \lambda_3\dot\lambda_0 + \lambda_2\dot\lambda_1 - \lambda_1\dot\lambda_2). \end{gathered} \tag{9}$$

Из равенств (9) и условия

$$\lambda_0\dot\lambda_0 + \lambda_1\dot\lambda_1 + \lambda_2\dot\lambda_2 + \lambda_3\dot\lambda_3 = 0, \tag{10}$$

полученного дифференцированием по времени равенства (8), следуют соотношения

$$\begin{gathered} 2\dot\lambda_0 = -(\lambda_1 p + \lambda_2 q + \lambda_3 r), \quad 2\dot\lambda_1 = \lambda_0 p - \lambda_3 q + \lambda_2 r, \\ 2\dot\lambda_2 = \lambda_3 p + \lambda_0 q - \lambda_1 r, \quad 2\dot\lambda_3 = -\lambda_2 p + \lambda_1 q + \lambda_0 r, \end{gathered} \tag{11}$$

которые являют собою параметрическое представление связи (см. (1.1) в [5]), где за параметры действительных перемещений приняты $\eta_1 = p$, $\eta_2 = q$, $\eta_3 = r$. Уравнения (11) аналогичны кинематическим уравнениям Эйлера.

Используя (11), получаем интранзитивную группу $SO(3)$ линейных операторов виртуальных перемещений

$$X_1 f = -\frac{1}{2}\left(\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial \lambda_0} - \lambda_0 \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} - \lambda_3 \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial \lambda_3}\right),$$

$$X_2 f = \frac{1}{2}\left(-\lambda_2 \frac{\partial f}{\partial \lambda_0} - \lambda_3 \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} + \lambda_0 \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial \lambda_3}\right), \qquad (12)$$

$$X_3 f = -\frac{1}{2}\left(\lambda_3 \frac{\partial f}{\partial \lambda_0} - \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} - \lambda_0 \frac{\partial f}{\partial \lambda_3}\right)$$

с коммутатором вида (2)

$$[X_1, X_2]f = X_3 f, \quad [X_2, X_3]f = X_1 f, \quad [X_3, X_1]f = X_2 f.$$

Следовательно, ненулевые структурные постоянные группы (12) суть

$$c_{12}^3 = c_{23}^1 = c_{31}^2 = 1, \quad c_{21}^3 = c_{32}^1 = c_{13}^2 = -1. \qquad (13)$$

Кинетическая энергия твердого тела

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

где A, B, C — главные моменты инерции тела для точки O. Силовая функция силы тяжести

$$U = -Mg(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3),$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести, Mg — вес тела, γ_i — косинусы углов между вертикалью 0ζ и осями x, y, z:

$$\gamma_1 = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2), \quad \gamma_2 = 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \quad \gamma_3 = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2,$$

в параметрах Родрига–Гамильтона имеет вид

$$U = -Mg[2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)x_0 + 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)y_0 + (\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)z_0]. \qquad (14)$$

Уравнения Пуанкаре [1] с учетом введенных обозначений и равенств (12)–(14) принимают вид динамических уравнений Эйлера

$$A\frac{dp}{dt}-(B-C)qr=Mg[2(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)z_0-(\lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2)y_0)],$$

$$B\frac{dq}{dt}-(C-A)qr=Mg[(\lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2)x_0-2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)z_0],$$

$$C\frac{dr}{dt}-(A-B)pq=2Mg[(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)y_0-(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)x_0)], \tag{15}$$

правые части которых выражены в параметрах Родрига–Гамильтона. Вместе с уравнениями (11) уравнения (15) образуют совместную систему семи дифференциальных уравнений первого порядка, каждое с таким же числом неизвестных p, q, r, λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, связанных соотношением (8). Уравнения (15), (11) аналогичны классическим уравнениям Эйлера в переменных p, q, r, θ, ψ, φ.

Как и в классическом случае, уравнения (15), (11) имеют первые интегралы: энергии

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2+2Mg[2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)x_0+$$
$$+2(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)y_0+(\lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2)z_0]=h=\text{const},$$

площадей

$$2Ap(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)+2Bq(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)+$$
$$+Cr(\lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2)=k=\text{const}$$

и геометрический (8), а в случае динамически симметричного твердого тела, когда $A=B$, $x_0=y_0=0$, также и интеграл постоянства проекции на ось симметрии угловой скорости вращения

$$r=\text{const}.$$

По сравнению с четырьмя уравнениями (1.11) [1] или (1.7.6) [3] второго порядка каждое система уравнений (11), (15) имеет порядок на единицу меньший.

Преобразуем, наконец, уравнения (15), (11) к виду канонических уравнений Четаева (4), (5). Вводя согласно (3) вместо параметров η_s и функции $L^*(x,\eta)$ переменные

$$y_1 = \frac{\partial L^*}{\partial p} = Ap, \quad y_2 = \frac{\partial L^*}{\partial q} = Bq, \quad y_3 = \frac{\partial L^*}{\partial r} = Cr$$

и обобщенную функцию Гамильтона

$$H^*(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,y_1,y_2,y_3) = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{A} + \frac{y_2^2}{B} + \frac{y_3^2}{C}\right) + -$$

$$+Mg[2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)x_0 + 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)y_0 + (\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)z_0], \tag{16}$$

получаем канонические уравнения (4), (5) в параметрах Родрига–Гамильтона

$$\frac{dy_1}{dt} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)y_2y_3 + Mg[2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)z_0 - (\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)y_0],$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right)y_3y_1 + Mg[(\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)x_0 - 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)z_0],$$

$$\frac{dy_3}{dt} = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)y_1y_2 + 2Mg[(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)y_0 - (\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)x_0],$$

$$2\frac{d\lambda_0}{dt} = -\left(\lambda_1\frac{y_1}{A} + \lambda_2\frac{y_2}{B} + \lambda_3\frac{y_3}{C}\right), 2\frac{d\lambda_1}{dt} = \lambda_0\frac{y_1}{A} - \lambda_3\frac{y_2}{B} + \lambda_2\frac{y_3}{C},$$

$$2\frac{d\lambda_2}{dt} = \lambda_3\frac{y_1}{A} + \lambda_0\frac{y_2}{B} - \lambda_1\frac{y_3}{C}, \quad 2\frac{d\lambda_3}{dt} = -\lambda_2\frac{y_1}{A} + \lambda_1\frac{y_2}{B} + \lambda_0\frac{y_3}{C}. \tag{17}$$

Нетрудно заметить с учетом (7), что уравнения (17) можно записать [5] в виде гамильтоновых уравнений (6) в неканонических переменных y_s, λ_i:

$$\frac{dy_s}{dt} = (y_s, H), \quad \frac{d\lambda_i}{dt} = (\lambda_i, H), \quad s = 1,2,3; \quad i = 0,1,2,3.$$

3. В заключение приведем уравнения движения тяжелого твердого тела, аналогичные уравнениям (11), (15), в параметрах Кэйли–Клейна [6]

$$\alpha = \lambda_0 + i\lambda_3, \ \beta = -\lambda_2 + i\lambda_1, \ \gamma = \lambda_2 + i\lambda_1, \ \delta = \lambda_0 - i\lambda_3, \ i = \sqrt{-1}, \tag{18}$$

связанных между собой соотношением

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{19}$$

Дифференцируя по времени равенства (18), получаем с учетом (11) кинематические уравнения в параметрах Кэйли–Клейна

$$\dot\alpha = \frac{1}{2}(i\beta p + \beta q + i\alpha r), \ \ \dot\beta = \frac{1}{2}(i\alpha p - \alpha q - i\beta r),$$

$$\dot\gamma = \frac{1}{2}(i\delta p + \delta q + i\gamma r), \ \ \dot\delta = \frac{1}{2}(i\gamma p - \gamma q + i\delta r). \tag{20}$$

Обратные соотношения имеют вид [6]

$$p + iq = 2i(\beta\dot\delta - \delta\dot\beta), \ p - iq = 2i(\gamma\dot\alpha - \alpha\dot\gamma), \ \ r = 2i(\beta\dot\gamma - \delta\dot\alpha). \tag{21}$$

Если правые части уравнений (15) выразить [3] через параметры Кэйли–Клейна, то уравнения (15) примут вид

$$\begin{aligned} &A\frac{dp}{dt} - (B - C)qr = -Mg[(\alpha\delta + \beta\gamma)y_0 + (\alpha\gamma + \beta\delta)iz_0], \\ &B\frac{dq}{dt} - (C - A)rp = Mg[(\alpha\delta + \beta\gamma)x_0 - (\beta\delta - \alpha\gamma)z_0], \\ &C\frac{dr}{dt} - (A - B)pq = -Mg[(\beta\delta - \alpha\gamma)y_0 + (\alpha\gamma + \beta\delta)ix_0]. \end{aligned} \tag{22}$$

Эти уравнения должны исследоваться совместно с уравнениями (20). В результате имеем совместную систему семи уравнений первого порядка каждое с таким же числом неизвестных p, q, r, α, β, γ, δ, последние четыре из которых связаны соотношением (19), представляющим собой первый интеграл уравнений

(20). Система уравнений (22), (20) имеет порядок на единицу меньший порядка системы уравнений (1.6) [2].

Аналогичным образом канонические уравнения (17) в параметрах Родрига–Гамильтона эквивалентны системе уравнений

$$\frac{dy_1}{dt} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right) y_2 y_3 - Mg[(\alpha\delta + \beta\gamma)y_0 + (\alpha\gamma + \beta\delta)iz_0],$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) y_3 y_1 + Mg[(\alpha\delta + \beta\gamma)x_0 - (\beta\delta - \alpha\gamma)z_0],$$

$$\frac{dy_3}{dt} = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right) y_1 y_2 + Mg[(\beta\delta - \alpha\gamma)y_0 + (\alpha\gamma + \beta\delta)ix_0], \qquad (23)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2}\left(i\beta\frac{y_1}{A} + \beta\frac{y_2}{B} + i\alpha\frac{y_3}{C}\right), \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{2}\left(i\alpha\frac{y_1}{A} - \alpha\frac{y_2}{B} - i\beta\frac{y_3}{C}\right),$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2}\left(i\delta\frac{y_1}{A} + \delta\frac{y_2}{B} + i\gamma\frac{y_3}{C}\right), \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{2}\left(i\gamma\frac{y_1}{A} - \gamma\frac{y_2}{B} - i\delta\frac{y_3}{C}\right)$$

в параметрах Кэйли–Клейна.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-15-96051).

1. *Кошляков В.Н.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Укр. мат. журн. — 1973. — 25, № 5. — С. 677–681.
2. *Кошляков В.Н.* О применении параметров Родрига–Гамильтона и Кэйли–Клейна к задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Там же. — 1974. — 26, № 2. — С. 179–187.
3. *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. — М.: Наука, 1985. — 286 с.
4. *Четаев Н.Г.* Об уравнениях Пуанкаре // Прикл. математика и механика. — 1941. — 5, вып.2. — С. 253–262.
5. *Румянцев В.В.* Об уравнениях Пуанкаре–Четаева // Там же. — 1984. — 58, вып.3. — С. 3–16.
6. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.