УДК 531.01

© 1996 г. В.В. Румянцев

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Показана связь обобщенных уравнений Пуанкаре и Четаева, представляющих уравнения движения механических систем с помощью некоторой замкнутой системы инфинитезимальных линейных операторов, с основными уравнениями аналитической динамики. Выведены уравнения в квазикоординатах для случая избыточных переменных; показано, что при условиях существования интеграла энергии оператор $X_0 = \partial/\partial t$ удовлетворяет условиям циклических перемещений по Четаеву. С помощью интеграла энергии понижен порядок системы уравнений движения и выведены обобщенные уравнения Якоби–Уиттекера из уравнений Пуанкаре и уравнения Уиттекера из уравнений Четаева. Показана эквивалентность уравнениям Пуанкаре–Четаева ряда уравнений движения неголономных систем, в частности уравнений Маджи, Вольтерры, Кейна и др.

На основе этих, а также других ранее полученных результатов уравнения Пуанкаре и Четаева в избыточных переменных, применимые как к голономным, так и к неголономным системам, можно рассматривать как общие уравнения классической динамики, эквивалентные основным известным формам уравнений движения, ряд из которых следует из уравнений Пуанкаре и Четаева как частные случаи.

Замечательные идея Пуанкаре [1] и теория Четаева [2–4] по применению групп Ли для представления уравнений движения голономных систем получили развитие в ряде работ [5–20].

Так получены уравнения в вариациях для уравнений Пуанкаре и исследовано существование для последних основного инварианта [5, 6]. Выведены в форме уравнений Пуанкаре и Четаева уравнения движения системы с бесконечным числом степеней свободы – твердого тела с полостью, содержащей жидкость [7]. Изложен один из способов построения групп возможных перемещений [8]. Дано обобщение и применение циклических перемещений Четаева, в частности, получено обобщение теоремы площадей Чаплыгина и установлены некоторые теоремы взаимодействия частей системы [9–11].

В цикле статей [12–14] уравнения Пуанкаре впервые применены для неголономных систем, для которых система операторов виртуальных перемещений, как показано, не является замкнутой, тогда как для голономных систем она замкнута. Несколькими методами выведены уравнения Пуанкаре для неголономных систем и показана их эквивалентность многим известным уравнениям, таким как уравнения Аппеля, Гамеля, Вольтерры, Чаплыгина, Ферререса и др.

В цикле работ [15–18] нелинейной обратимой заменой импульсов гамильтонова система приведена к виду, близкому к системе Пуанкаре–Четаева. Следствия: теорема о полной интегрируемости, об интегрируемости на интегральных многообразиях и о классах эквивалентности гамильтоновых систем. Предложен новый способ получения частных решений из известных первых интегралов. Для случая, когда кинетическая энергия не зависит от координат, установлены условия существования полного набора линейных интегралов и получены квадратуры для них. С помощью введения избыточных параметров Пуанкаре получены уравнения движения неголономных систем для случая стационарных связей и выражения реакций последних. Из уравнений Пуанкаре–Четаева получены уравнения гидродинамического типа и др.

Доказано [19, 20], что канонические уравнения Четаева представляет собой гамильтоновы уравнения в неканонических переменных. Показано, что системы обобщенных уравнений Лагранжа и Гамильтона в избыточных координатах, а также уравнения в квазикоординатах представляют собой частные случаи уравнений Пуанкаре–Четаева, теория которых тем самым распространена на названные системы уравнений. Выведены также уравнения движения неголономных систем в форме уравнений Пуанкаре, внешне отличные, но эквивалентные уравнениям, приведенным в [12–14], и в форме уравнений Четаева.

1. Голономные системы. 1°. *Определяющие координаты, параметризация связей.* Рассмотрим механическую голономную систему, обладающую k степенями свободы. Положение системы в пространстве для любого момента времени t задается определяющими координатами [4] x_i $(i = 1, \ldots, n \geqslant k)$, $\mathbf{r}_\upsilon = \mathbf{r}_\upsilon(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(\upsilon = 1, \ldots, N)$, где $\mathbf{r}_\upsilon$ – радиус-вектор материальной точки с массой m_υ. При $n = k$ переменные x_i являются независимыми лагранжевыми координатами, а при $n > k$ – зависимыми, или избыточными координатами, стесненными связями, заданными интегрируемой системой дифференциальных уравнений

$$\eta_j \equiv a_{ji}(t, x_1, \ldots, x_n)\dot{x}_i + a_{j0}(t, x_1, \ldots, x_n) = 0, j = k+1, \ldots, n$$

$$\operatorname{rank}(a_{ji}) = n-k, \dot{x}_i = dx_i/dt.$$

Всюду по повторяющимся индексам производится суммирование.

Использование избыточных координат в ряде случаев полезно для упрощения выражений кинематических и динамических величин [21].

Условимся обозначать для симметрии и сокращения записей $t = x_0$,

$$\eta_j \equiv a_{ji}(x)\dot{x}_i = 0, i = 0, 1, \ldots n, j = k+1, \ldots, n \tag{1.1}$$

где $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Достаточные условия интегрируемости уравнений (1.1) имеют, как известно [22], вид

$$\frac{\partial a_{jr}}{\partial x_s} = \frac{\partial a_{js}}{\partial x_r}, \quad r, \ s = 0, 1, \ldots, n; \ j = k+1, \ldots, n \tag{1.2}$$

Дополним формы (1.1) произвольно выбранными линейными формами

$$\eta_s \equiv a_{si}(x)\dot{x}_i, s = 0, 1, \ldots, k, i = 0, 1, \ldots, n, \eta_0 = 1, a_{0i} = \delta_{0i} \tag{1.3}$$

линейно независимыми как между собой, так и по отношению к формам (1.1), так что $\det(a_{ij}) \neq 0$ $(i, j = 0, 1, \ldots, n)$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Решая уравнения (1.1), (1.3) относительно $\dot{x}_i$, получаем параметрическое представление связей

$$\dot{x}_i = b_{is}(x)\eta_s, s = 0, 1, \ldots, k, i = 0, 1, \ldots, n, b_{0s} = \delta_{0s} \tag{1.4}$$

причем $a_{si}b_{ir} = a_{ir}b_{si} = \delta_{sr}$.

2°. *Система операторов, параметры Пуанкаре.* Параметризация (1.4) позволяет построить замкнутую систему инфинитезимальных линейных операторов

$$X_s f \equiv b_{is}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad s = 0, 1, \ldots, k, \quad f(x) \in C^2 \tag{1.5}$$

определяющих виртуальные и действительные перемещения системы

$$\delta f = \omega_r X_r f, \quad r = 1, \ldots, k, df = \eta_s X_s f dt, s = 0, 1, \ldots, k \tag{1.6}$$

соответственно, где $\omega_r \equiv a_{ri}(x)\delta x_i$ $(i = 1, \ldots, n; r = 1, \ldots, k)$ и η_s – параметры виртуальных и действительных перемещений, введенные Пуанкаре [1].

Система операторов (1.5) является замкнутой системой в том смысле, что ее коммутатор (скобка Пуассона) имеет вид

$$[X_r, X_s]f \equiv X_r X_s f - X_s X_r f = c_{rs}{}^m X_m f, m, r, s = 0, 1, \ldots, k \tag{1.7}$$

где структурные коэффициенты

$$c_{rs}^m = \left(\frac{\partial a_{mj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{mi}}{\partial x_j}\right) b_{is} b_{jr} = a_{mj}\left(b_{ir}\frac{\partial b_{js}}{\partial x_i} - b_{is}\frac{\partial b_{ir}}{\partial x_i}\right), \quad i,\ j = 0,1,\ \ldots,\ n \tag{1.8}$$

причем $c_{rs}{}^m = -c_{sr}{}^m$, $c_{0s}{}^0 = 0$ $(m, r, s = 0,1, \ldots, k)$. Коммутатор билинеен, кососимметричен и удовлетворяет тождеству Якоби; в свою очередь, он представляет собою дифференциальный оператор первого порядка [4, 23].

Выбором вспомогательных форм (1.3) замкнутую систему (1.5) можно упростить до группы Ли, когда все $c_{sr}^m = \text{const}$ [4]. Именно такой случай рассматривали и Пуанкаре, и Четаев. Однако в общем случае замкнутой системы (1.5) коэффициенты c_{sr}^m будут, вообще говоря, переменными, и этот случай не исключается далее из рассмотрения.

Заметим, что если формы (1.3) интегрируемы, как и формы (1.1), то условия (1.2) выполняются и для $j = 1, \ldots, k$, тогда существуют функции вида $\pi_s = \pi_s(x)$, которые могут служить новыми определяющими координатами, причем $\eta_s = \dot{\pi}_s$ $(s = 1, \ldots, k)$, и

$$\frac{\partial \pi_s}{\partial x_i} = \frac{\partial \eta_s}{\partial \dot{x}_i} = a_{si}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial \pi_s} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \eta_s} = b_{is}$$

В этом случае система операторов (1.5) представляет собою абелеву группу функций

$$X_s f \equiv b_{is}\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial \pi_s}, \quad s = 0,1,\ \ldots,\ k; \ i = 0,1,\ \ldots,\ n$$

для которой все коэффициенты $c_{sr}^m = 0$ $(m, r, s = 0,1, \ldots k)$.

Если формы (1.3) не интегрируемы, то величины $\pi_s(x)$ как функции времени и координат не существуют, однако символы π_s целесообразно вводить в рассмотрение под названием квазикоординат, принимая условные обозначения для квазискоростей $\eta_s = \dot{\pi}_s$ и дифференциалов квазикоординат $d\pi_s = \eta_s dt$, а также для "частных производных по квазикоординатам" и для обратных соотношений [21]

$$\frac{\partial f}{\partial \pi_s} = b_{is}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{si}\frac{\partial f}{\partial \pi_s}, \quad i = 0,1,\ \ldots,\ n; \ s = 0,1,\ \ldots,\ k \tag{1.9}$$

Согласно (1.9) операторы (1.5) в этом случае представляются в виде

$$X_s f = \partial f / \partial \pi_s, \quad s = 0,1,\ \ldots,\ k \tag{1.10}$$

с коммутатором (1.7), принимающим вид

$$[X_r,\ X_s] f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial \pi_r \partial \pi_s} - \frac{\partial^2 f}{\partial \pi_s \partial \pi_r} = c_{rs}^m \frac{\partial f}{\partial \pi_m}$$

где в общем случае $c_{rs}{}^m \neq 0$.

Параметры η_i и ω_i связаны между собой соотношениями

$$d\omega_i / dt - \delta\eta_i = c_{rs}^i \eta_r \omega_s, \quad i,\ r,\ s = 0,1,\ \ldots,\ k \tag{1.11}$$

первоначально установленными Пуанкаре для случая, когда $c_{0s}^i = 0$.

Заметим, что выражение (1.11) эквивалентно выражению внешней производной формы $\omega_i = a_j \delta x_j$. Выражения коэффициентов в c_{rs}^i проще находить из соотношений (1.11), нежели применять общие формулы (1.8) [21].

3°. Уравнения Пуанкаре. Пуанкаре [1] и Четаев [2, 3] использовали для вывода уравнений принцип Гамильтона, а Четаев [4] – также и принцип Д'Аламбера–Лагранжа в обычной форме

$$(m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{F}_\nu)\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = 0,\ \nu = 1,\ \ldots,\ N \tag{1.12}$$

Воспользуемся принципом Д'Аламбера–Лагранжа в определяющих координатах [4]

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} - Q_i\right)\delta x_i = 0,\ i = 1,\ \ldots,\ n \tag{1.13}$$

где $L(t, x, \dot{x}) = T(t, x, \dot{x}) + U(t, x)$ – функция Лагранжа, $T(t, x, \dot{x})$ – кинетическая энергия, $U(t, x)$ – силовая функция, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$, $Q_i = \mathbf{F}_\nu^{*H}\cdot \partial\mathbf{r}_\nu/\partial x_i$ – обобщенная непотенциальная сила.

Согласно равенствам (1.5) и (1.6)

$\delta x_i = \omega_s X_s x_i = \omega_s b_{is}$, $i = 1, \ldots, n$; $s = 1, \ldots, k$

вследствие чего в силу произвольности ω_s из (1.13) следуют уравнения движения Маджи [24]

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} - Q_i\right)b_{is} = 0,\ s = 1,\ \ldots,\ k \tag{1.14}$$

Используя (1.4), выразим функцию Лагранжа в виде равенства $L^*(t, x, \eta) = L(t, x, \dot{x})$, дифференцируя которое и учитывая (1.3), получим соотношения [25]

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L^*}{\partial \eta_m}a_{mi},\quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial L^*}{\partial x_i} + \frac{\partial L^*}{\partial \eta_m}\left(\frac{\partial a_{mj}}{\partial x_i}b_{jr}\eta_r + \frac{\partial a_{mo}}{\partial x_i}\right),\ i,\ j = 0, 1,\ \ldots,\ n$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \eta_m}\right)a_{mi} + \frac{\partial L^*}{\partial \eta_m}\left(\frac{\partial a_{mi}}{\partial x_j}b_{jr}\eta_r + \frac{\partial a_{mi}}{\partial t}\right),\ r = 0, 1,\ \ldots,\ k$$

подстановка которых в (1.14) приводит к уравнениям Пуанкаре

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} = c_{rs}^m\frac{\partial L^*}{\partial \eta_m}\eta_r + c_{0s}^m\frac{\partial L^*}{\partial \eta_m} + X_s L^* + Q_s^*,\ m,\ r,\ s = 1,\ \ldots,\ k \tag{1.15}$$

где $Q_s^* = Q_i b_{is}$. Структурные коэффициенты

$$c_{rs}^m = \left(\frac{\partial a_{mj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{mi}}{\partial x_j}\right)b_{is}b_{jr},\ i,\ j = 1,\ \ldots,\ n$$

$$c_{0s}^m = \left[\left(\frac{\partial a_{mj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{mi}}{\partial x_j}\right)b_{j0} + \frac{\partial a_{m0}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{mi}}{\partial t}\right]b_{is} \tag{1.8*}$$

детализируют выражения (1.8) при явном выделении $t = x_0$.

Уравнения (1.15) вместе с уравнениями (1.4) образуют совместную систему $k + n$ дифференциальных уравнений движения первого порядка, каждое с таким же числом неизвестных $\eta_1, \ldots, \eta_k, x_1, \ldots, x_n$. Замечательно, что уравнения (1.15) в избыточных координатах не содержат сил реакций связей (1.1) и имеют один и тот же внешний вид как в независимых ($n = k$), так и в зависимых ($n > k$) координатах.

Уравнения Пуанкаре (1.15) содержат, как частные случаи, уравнения, впервые данные Пуанкаре [1] для случая $n = k$, $X_0 = \partial/\partial t$, $c_{oi}^s = 0$, $Q_i^* = 0$ ($i, s = 1, \ldots, k$); уравнения Лагранжа второго рода в случае $n = k$, $\eta_s = \dot{x}_s$, $X_s = \partial/\partial x_s$, когда все $c_{rs}{}^m = 0$;

обобщенные уравнения Лагранжа [19] в избыточных координатах

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}_s}-\frac{\partial L^*}{\partial x_s}-b_{js}\frac{\partial L^*}{\partial x_j}=Q_s^*,\ s=1,\ \ldots,\ k;\ \ j=k+1,\ \ldots,\ n$$

когда связи заданы в виде $\dot{x}_j = b_{js}\dot{x}_s$ $(s = 0,1, \ldots, k;\ j = k + 1, \ldots, n)$ и $\dot{x}_s = \eta_s$, $L^* = L^*(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k)$, а также обобщенные уравнения Больцмана [26] – Гамеля [27] в квазикоординатах

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\pi}_s}=c_{rs}^m\dot{\pi}_r\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\pi}_m}+c_{0s}^m\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\pi}_m}+\frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}+Q_s^*,\ m,\ r,\ s=1,\ \ldots,\ k \tag{1.16}$$

где $L^* = L^*(t, x_1, \ldots, x_n; \dot{\pi}_1, \ldots, \dot{\pi}_k)$.

Уравнения (1.16) представляют в единой форме уравнения Больцмана в случае зависимых координат (после исключения неопределенных множителей) и уравнения Больцмана–Гамеля в случае независимых координат. В частности, из уравнений (1.16) вытекают уравнения Эйлера движения твердого тела вокруг неподвижной точки.

Уравнения (1.15), (1.4) при определенных условиях допускают некоторые первые интегралы.

Если

$$X_0 = \partial/\partial t,\quad c_{0i}^s = 0,\ X_0L^* = 0,\quad Q_s^* = 0,\ i, s = 1, \ldots, k \tag{1.17}$$

то существует интеграл энергии

$$\frac{\partial L^*}{\partial \eta_i}\eta_i - L^* = h = \text{const},\ \ i=1,\ \ldots,\ k$$

принимающий в общем случае $L^* = L_2^* + L_1^* + L_0^*$, где L_s^* – однородные формы переменных η_i степени s $(s = 0, 1, 2)$, вид $L_2^* - L_0^* = h$.

Заметим, что условия (1.17) выполняются, если в уравнениях (1.3) и (1.4) все $a_{s0} = b_{i0} = 0$, а коэффициенты a_{si} и b_{is} не зависят явно от времени, как и функция Лагранжа $L^*(x_1, \ldots, x_n, \eta_1, \ldots, \eta_k)$.

Для случая $Q_i^* = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ Четаев [3, 4] ввел понятие циклических перемещений X_α $(\alpha = l + 1, \ldots, k)$, удовлетворяющих условиям:

$$1)\ [X_\alpha, X_s] = 0,\ s = 0,1, \ldots, k,\quad 2)\ X_\alpha L^* = 0 \tag{1.18}$$

При $Q_s^* = 0$ и условиях (1.18) уравнения (1.15) имеют первые интегралы

$$\partial L^* / \partial \eta_\alpha = \beta_\alpha = \text{const},\ \ \alpha = l+1,\ \ldots,\ k \tag{1.19}$$

С помощью интегралов (1.19) Четаев построил обобщенную функцию Рауса и показал, что уравнения Пуанкаре принимают для нециклических перемещений X_s $(s = 1, \ldots, l)$ вид обобщенных уравнений Рауса [3, 4].

Сравнивая условия (1.17) и (1.18), видим, что оператор $X_0 = \partial/\partial t$ удовлетворяет условиям (1.18), т.е. является оператором циклического перемещения, которому отвечает интеграл энергии.

В самом деле, если представить уравнения Пуанкаре в параметрической форме, когда время $t = x_0$ и координаты x_i $(i = 1, \ldots, n)$ рассматриваются как независимые одна от другой переменные x_α $(\alpha = 0,1, \ldots, n)$, стесненные дифференциальными связями (1.1) и задаваемые непрерывными дифференцируемыми функциями некоторого параметра τ, $x'_\alpha = x_\alpha(\tau)$, то переменной x_0 при условиях (1.17) будет отвечать интеграл энергии параметрических уравнений Пуанкаре с лагранжианом [28] $L^*(x_i, \eta_s)\,x'_0$, $x'_0 = dt/d\tau$.

Используя интеграл энергии, можно понизить порядок системы уравнений, определяя из интеграла переменную

$$x'_0 = t' = \varphi(x_i, \eta_s, h)$$

и строя функцию Рауса

$$R(x_i,\ \eta_s,\ h) = L^* x'_0 - \left(L^* - \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} \eta_s \right) x'_0 = \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} \eta_s x'_o \tag{1.20}$$

в правой части которой переменная x'_o заменена функцией $\varphi(x_i, \eta_s, h)$. Параметрические уравнения Рауса при $\tau = t'$ принимают вид уравнений Пуанкаре (1.15), в которых все $c_{0s}{}^m = 0$, $Q_s{}^* = 0$.

Если же принять за параметр τ одну из величин π_s, скажем π_1, то из интеграла энергии можно найти

$$\eta_1 = \dot{\pi}_1 = 1/t' = \psi(x_i, \eta'_r, h),\ r = 2, \ldots, k$$

где $\eta'_r = d\pi_r/d\pi_1 = \eta_r/\eta_1$, $t' = dt/d\pi_1 = 1/\eta_1$, и, подставив в (1.20), получить новую функцию Рауса

$$R'(x_i,\ \eta'_r,\ h) = \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} \frac{\eta_s}{\eta_1} \tag{1.21}$$

Нетрудно показать [25], что справедливы равенства

$$\frac{\partial R'}{\partial \eta'_r} = \frac{\partial L^*}{\partial \eta_r},\ \frac{\partial R'}{\partial x_i} = \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial L^*}{\partial x_i},\ i = 1,\ \ldots,\ n;\ r = 2,\ \ldots,\ k$$

подставляя которые в уравнения (1.16) для $s = 2, \ldots, k$ и всех $c_{0s}{}^m = Q_s{}^* = 0$, получим обобщенные уравнения Якоби [29] – Уиттекера [25] в квазикоординатах

$$\frac{d}{d\pi_1} \frac{\partial R^*}{\partial \eta'_s} = c^m_{rs} \eta'_r \frac{\partial R'}{\partial \eta'_m} + \frac{\partial R}{\partial \pi_s},\ s = 2,\ \ldots,\ k \tag{1.22}$$

Если положить в (1.3) $\eta_1 = \dot{x}_1$ (тогда [26] $c_{rs}{}^1 = 0$), то уравнения (1.22) примут вид

$$\frac{d}{dx_1} \frac{\partial R'}{\partial \eta'_s} = c^m_{rs} \eta'_r \frac{\partial R'}{\partial \eta'_m} + \frac{\partial R'}{\partial \pi'_s},\ m,\ r,\ s = 2,\ \ldots,\ k \tag{1.23}$$

Как отмечено в разд. 1.2°, в случае интегрируемости уравнений (1.3) переменные π_s могут служить новыми определяющими координатами. Тогда все $c_{rs}{}^m = 0$ и уравнения (1.23) примут вид уравнений Якоби–Уиттекера.

Уравнения (1.23) надлежит исследовать в общем случае совместно с уравнениями связей (1.4), переписанными в виде

$$x' = b_{is} \eta'_s,\ i = 2, \ldots, n;\ s = 2, \ldots, k \tag{1.24}$$

Уравнения (1.23) и (1.24) можно рассматривать как уравнения движения новой динамической системы с k–1 степенями свободы, для которой R' представляет кинетический потенциал, η'_r – параметры действительных перемещений, а x_1 играет роль времени в качестве независимой переменной. Зависимость x_1 от времени t устанавливается квадратурой [25].

4°. *Канонические уравнения Четаева*. Четаев [3, 4] преобразовал уравнения Пуанкаре к каноническому виду введением вместо η_s и $L^*(t, x, \eta)$ новых переменных y_s и функции $H^*(t, x, y)$, определяемых равенствами

$$y_s = \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s},\ s = 1,\ \ldots,\ k,\ H^*(t, x,\ y) = y_s \eta_s - L^*(t, x,\ \eta) \tag{1.25}$$

из которых следуют равенства

$$X_s H^* = -X_s L^*, \ \eta_s = \frac{\partial H^*}{\partial y_s}, \ s = 1, \ \dots, \ k \tag{1.26}$$

Преобразование (1.25) представляет собой преобразование Лежандра, если учесть, что $\left\| \partial^2 L^* / \partial\eta_r \partial\eta_s \right\| \neq 0$, $(r, \ s = 1, \ \dots, \ k)$. Так как

$$y_s = \frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \eta_s} = p_i b_{is}, \ \eta_s = a_{sj} \dot{x}_j, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$

то, очевидно, справедливо равенство

$$H^*(t, x, y) = p_i b_{is} a_{sj} \dot{x}_j - L(t, x, \dot{x}) = H(t, x, p)$$

(учитывается формула $a_{sj} b_{is} = \delta_{ij}$).

Подстановка (1.25), (1.26) в уравнения Пуанкаре (1.15) приводит к каноническим уравнениям Четаева

$$\frac{dy_s}{dt} = c_{rs}^m \frac{\partial H^*}{\partial y_r} y_m + c_{os}^m y_m - X_s H^* + Q_s^*, \ \eta_s = \frac{\partial H^*}{\partial y_s}, \quad m, \ r, \ s = 1, \ \dots, \ k \tag{1.27}$$

Эти уравнения в общем случае надлежит исследовать совместно с уравнениями (1.4), с помощью которых второй группе уравнений (1.27) можно придать другой вид [4]:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_o x_i + \frac{\partial H^*}{\partial y_s} X_s x_i, \ i = 1, \ \dots, \ n \tag{1.28}$$

Отметим, что, подобно уравнениям (1.15), первую группу уравнений (1.27) можно вывести непосредственно из уравнений (1.14), переписанных в виде

$$\left(\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x_i} - Q_i \right) b_{is} = 0, \ s = 1, \ \dots, \ k$$

(учитываются равенства вида (1.26)).

Уравнения Четаева (1.27) содержат как частные случаи:

1) канонические уравнения Гамильтона, когда переменные x_i – независимые лагранжевы координаты ($n = k$), а группа (1.5) сводится к перестановочным преобразованиям, причем за параметры действительных перемещений приняты лагранжевы обобщенные скорости $\eta_i = \dot{x}_i$, при этом переменные x_i, p_i будут каноническими координатами, а $H(t,x,p)$ – классической функцией Гамильтона;

2) обобщенные уравнения Гамильтона в избыточных координатах [19]

$$\frac{dy_s}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial x_s} - b_{js} \frac{\partial H^*}{\partial x_j} + Q_s^*, \ \frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial y_s}, \ s = 1, \ \dots, \ k; \ j = k+1, \ \dots, \ n$$

3) канонические уравнения Больцмана–Гамеля в квазикоординатах [19]

$$\frac{dy_s}{dt} = c_{rs}^m \frac{\partial H^*}{\partial y_r} y_m + c_{os}^m y_m - \frac{\partial H^*}{\partial \pi_s} + Q_s^*, \ \frac{d\pi_s}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial y_s}$$

Для уравнений (1.27) при $Q_s = 0$ справедливы обобщенные теоремы Якоби и Пуассона [2–4] (последняя при некоторых дополнительных условиях).

При условиях $X_0 = \partial/\partial t$, $c_{oi}^s = 0$, $X_0 H^* = 0$, $Q_s^* = 0$ $(i, \ s = 1, \ \dots, \ k)$, эквивалентных условиям (1.17), уравнения (1.27) имеют интеграл энергии

$$H^*(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = \mathrm{const}$$

равносильный интегралу энергии уравнений (1.15).

В случае существования циклических перемещений $X_\alpha (\alpha = l + 1, \ldots, k)$ при условиях (1.18) уравнения (1.27) при $Q_s^* = 0$ допускают интегралы

$$y_\alpha = \beta_\alpha = \mathrm{const}, \ \alpha = l + 1, \ldots, k$$

аналогичные интегралам (1.19) уравнений (1.15). Для нециклических перемещений X_i (1.27) принимают вид уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = c_{ri}^s \frac{\partial H^*}{\partial y_r} y_s + c_{ri} \frac{\partial H^*}{\partial y_r} \beta + c_{0i}^s y_s + c_{0i}\beta - X_i H^* + Q_s^*, \ \ \eta_i = \frac{\partial H^*}{\partial y_s} \tag{1.29}$$

$$i, r, s = 1, \ldots, l; \quad \alpha = l + 1, \ldots, k$$

эквивалентных обобщенным уравнениям Рауса [3, 4], где $H^* = H^*(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_l, \beta_{l+1}, \ldots, \beta_k)$. После интегрирования уравнений (1.29) переменные η_α определяются равенствами $\eta_\alpha = \partial H^* / \partial \beta_\alpha \ (\alpha = l + 1, \ldots, k)$.

С помощью интеграла энергии можно понизить на две единицы порядок уравнений Четаева. Действительно, пусть интеграл $H^*(x_i, y_s) + h = 0$ разрешим относительно переменной y_1, так что

$$y_1 + K(x_1, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_k, h) = 0$$

Рассмотрим преобразование Лежандра для уравнений (1.22) и (1.23)

$$y'_r = \partial R' / \partial \eta'_r, \ \ K(x, \ y'_r, \ h) = y'_r \eta'_r - R'(x, \ \eta'_s, \ h), \ \ r = 2, \ \ldots, \ k$$

из которого следуют равенства $X_r K = -X_r R'$, $\eta'_r = \partial K / \partial y'_r$.

С учетом этих равенств уравнения (1.22) запишем в виде обобщенных уравнений Уиттекера [25]

$$\frac{dy'_s}{d\pi_1} = c_{rs}^m \frac{\partial K}{\partial y'_r} y'_m - \frac{\partial K}{\partial \pi_s}, \ \ m, r, \ \ s = 2, \ \ldots, \ \ k, \ \ \frac{dt}{d\pi_1} = \frac{\partial K}{\partial h}, \ \ \frac{dh}{d\pi_1} = 0 \tag{1.30}$$

как и уравнения (1.23):

$$\frac{dy'_s}{dx_1} = c_{rs}^m \frac{\partial K}{\partial y'_r} y'_m - \frac{\partial K}{\partial \pi_s}, \ \ m, \ r, \ s = 2, \ \ldots, \ k, \ \ \frac{dt}{dx_1} = \frac{\partial K}{\partial h}, \ \ \frac{dh}{dx_1} = 0 \tag{1.31}$$

Последние пары уравнений (1.30), (1.31) могут быть отделены от остальных уравнений, так как первые $2(k - 1)$ уравнений не содержат t, а $h = \mathrm{const}$. Поэтому первые $2(k - 1)$ уравнений (1.30) или (1.31) можно рассматривать как уравнения движения приведенной системы с $k - 1$ степенями свободы [25].

2. Неголономные системы. *1°. Уравнения Пуанкаре и Четаева для неголономных систем.* Уравнения Пуанкаре, как и уравнения Больцмана–Гамеля в квазикоординатах применимы для описания как голономных, так и неголономных систем. Ранее этот вопрос изучался в работах [12–15], а также в [19], где рассматривались в этом смысле и уравнения Четаева.

Следует, однако, подчеркнуть, что система операторов виртуальных перемещений для неголономных систем не является замкнутой [14, 15], вследствие чего приходится использовать операторы соответствующей голономной системы, получаемой из рассматриваемой неголономной системы мысленным отбрасыванием неинтегрируемых связей.

При рассмотрении неголономных систем, а также уравнений Больцмана–Гамеля исследовался [19] случай отсутствия интегрируемых связей. Здесь рассмотрим общий случай неголономной системы в избыточных координатах, стесненной как интегрируемыми связями

$$\eta_j \equiv a_{ji}(x)\dot{x}_i = 0, \operatorname{rank}(a_{ij}) = n - k, i = 0,1, \ldots, n; j = k+1, \ldots, n \tag{2.1}$$

так и неинтегрируемыми связями

$$\eta_\alpha \equiv a_{\alpha i}(x)\dot{x}_i = 0, \operatorname{rank}(a_{\alpha i}) = k - 1, \alpha = l+1, \ldots, k \tag{2.2}$$

Произвольно выберем линейные дифференциальные формы

$$\eta_s \equiv a_{si}(x)\dot{x}_i, s = 0,1, \ldots, l; a_{0i} = \delta_{0i} \tag{2.3}$$

независимые между собой, а также с формами (2.1), (2.2), $\det(a_{ij}) \neq 0$ $(i, j = 0,1, \ldots, n)$. В частности, за величины η_s, $(s = 1, \ldots, l)$ могут быть приняты обобщенные скорости $\dot{x}_s$.

Разрешение форм (2.1)–(2.3) приводит к уравнениям

$$\dot{x}_i = b_{is}(x)\eta_s, i = 0,1, \ldots, n, s = 0,1, \ldots, l; b_{i0} = \delta_{i0} \tag{2.4}$$

Для соответствующей голономной системы, получаемой из рассматриваемой мысленным отбрасыванием неинтегрируемых связей (2.2), т.е. полагая $\eta_\alpha \neq 0$ $(a = l+1, \ldots, k)$, вместо (2.4) имеем равенства

$$\dot{x}_i = b_{is}(x)\eta_s, i = 0,1, \ldots, n; s = 0,1, \ldots, k$$

и строим замкнутую систему операторов (1.5).

Так как параметры виртуальных перемещений $\omega_\alpha = 0$ при наличии связей (2.2), то из принципа Д'Аламбера–Лагранжа (1.13) выводим уравнения движения неголономной системы вида (1.15)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \eta_s} = c_{rs}^m \eta_r \frac{\partial L}{\partial \eta_m} + c_{os}^m \frac{\partial L^*}{\partial \eta_m} + X_s L^* + Q_s^*, \quad r, \ s = 1, \ \ldots, \ l; \ \ m = 1, \ \ldots, k \tag{2.5}$$

число которых меньше числа уравнений (1.15) на $k - 1$. Структурные коэффициенты $c_{rs}{}^m$ по-прежнему определяются формулами (1.8), в которых, однако, индексы r, $s = 0,1, \ldots, l$. Отметим, что уравнения (2.5) имеют такой же внешний вид, как и уравнения (5.3) [19] в независимых координатах. К уравнениям (2.5) должны быть добавлены уравнения связей (2.4), в результате получаем совместную систему $l + n$ уравнений движения с таким же числом неизвестных $x_1, \ldots, x_n, \eta_1, \ldots, \eta_l$.

Заметим, что функция $L^*(t, \eta)$, фигурирующая в уравнениях (2.5), построенная для соответствующей голономной системы, может зависеть в общем случае от всех параметров η_r $(r = 1,\ldots, k)$, вследствие чего уравнения связей $\eta_\alpha = 0$ $(\alpha = l+1, \ldots, k)$ должны учитываться только после составления уравнений (2.5) [27, 21, 30].

Отметим, что уравнения (2.5) в случае $Q_s{}^* = 0$ эквивалентны уравнениям (3.14) [12] и (1.13) [13], но внешне несколько проще их благодаря выбору параметров η_α, обращающихся в нуль в силу уравнений неинтегрируемых связей (2.2).

Для случаев, когда за параметры η_s (2.3) принимаются обобщенные скорости $\dot{x}_s = \eta_s$ $(s = 0,1, \ldots, l)$, т.е. когда $a_{si} = \delta_{si}$ $(i = 1, \ldots, n)$, все структурные коэффициенты [26] $c_{rs}{}^m = 0$ для $m \leqslant l$, и уравнения (2.5) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}_s} = c_{rs}^m \frac{\partial L^*}{\partial \eta_m}\dot{x}_r + c_{os}^m \frac{\partial L^*}{\partial \eta_m} + X_s L^* + Q_s^* \quad r, \ s = 1, \ \ldots, \ l, \quad m = l+1, \ \ldots, \ k \tag{2.6}$$

причем $L^* = L^*(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_l, \eta_{l+1}, \ldots, \eta_k)$.

Если заменить в функции $L^*(t, x, \eta)$ в уравнениях (2.5) кинетическую энергию $T^*(t, x, \eta_1, \ldots, \eta_k)$ соответствующей голономной системы на кинетическую энергию $\Theta(t, x, \eta_1, \ldots, \eta_l)$ неголономной системы со связями (2.2), то уравнения (2.5) примут вид уравнений (5.5) [19]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial\eta_s}=(c_{rs}^m\eta_r+c_{os}^m)\frac{\partial\theta}{\partial\eta_m}+(c_{rs}^p\eta_r+c_{os}^p)\left(\frac{\partial T^*}{\partial\eta_p}\right)+X_s(\theta+U)+Q_s^* \tag{2.7}$$

$$m,\ r,\ s=1,\ \ldots,\ l;\ p=l+1,\ \ldots,\ k$$

где $(\partial T^*/\partial\eta_p)$ означают выражения $\partial T^*/\partial\eta_p$ при $\eta_s = 0$ ($p, s = l + 1, \ldots, k$).

С помощью преобразования Лежандра (1.25) уравнения (2.5) движения неголономной системы записываются в виде канонических уравнений Четаева

$$\frac{dy_s}{dt}=c_{rs}^m\frac{\partial H^*}{\partial y_r}y_m+c_{os}^m y_m-X_sH^*+Q_s^*,\ \ \eta_s=\frac{\partial H^*}{\partial y_s} \tag{2.8}$$

$$r,\ s=1,\ \ldots,\ l;\ m=1,\ \ldots,\ k$$

к которым следует присоединить уравнения связей (2.2) и соотношения (2.4), переписанные в виде

$$\frac{\partial H^*}{\partial y_\alpha}=0,\ \ \alpha=l+1,\ \ldots,\ k;\ \ \frac{dx_i}{dt}=b_{ij}\frac{\partial H^*}{\partial y_j},\ \ i=1,\ \ldots,\ n;\ j=0,1,\ \ldots,\ l \tag{2.9}$$

Уравнения (2.8), (2.9) образуют полную систему $n + k + l$ уравнений с таким же числом неизвестных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k, \eta_1, \ldots, \eta_l$. Уравнения (2.8), (2.9) при $n = k$ принимают вид уравнений (7.17)–(7.19) [30].

Канонические уравнения движения неголономных систем, эквивалентные уравнениям (2.7), имеют вид

$$\frac{dy_s}{dt}=\left(c_{rs}^m\frac{\partial H^*}{\partial y_r}+c_{os}^m\right)y_m+\left(c_{rs}^p\frac{\partial H^*}{\partial y_r}+c_{os}^p\right)\left(\frac{\partial T^*}{\partial\eta_p}\right)-X_sH^*+Q_s \tag{2.10}$$

$$\eta_s=\partial H^*/\partial y_s,\ \ m,\ r,\ s=1,\ldots,l;\ \ p=l+1,\ \ldots,\ k$$

где $H^*=y_s\eta_s-\theta-U$.

2°. Эквивалентность уравнений Пуанкаре и Четаева различным формам уравнений движения. Ранее [12–14] прямыми вычислениями была показана эквивалентность уравнений Пуанкаре движения неголономных систем уравнениям Чаплыгина, Аппеля, Гамеля, Вольтерры, Ферререа и некоторым другим. Эквивалентность уравнений в квазикоординатах уравнениям Аппеля, а также уравнениям Чаплыгина была доказана [30] выводом этих групп уравнений из принципа Д'Аламбера–Лагранжа. Из уравнений Пуанкаре (5.6) [19] выведены уравнения Воронца.

Покажем эквивалентность уравнений Пуанкаре некоторым другим формам уравнений движения неголономных систем.

В разд. 1.3° уравнения Пуанкаре выведены из уравнений Маджи [24] (1.14). Аналогично, уравнения (2.5) эквивалентны уравнениям (1.14) при учете (2.2).

Как показал Маджи [24], из его уравнений следуют как уравнения Аппеля, так и уравнения Вольтерры.

Маджи рассматривал механическую систему с координатами x_i ($i = 1, \ldots, n$), стесненную m линейными связями, которые могут быть как голономными, так и неголономными, зависящими или не зависящими явно от времени. Разрешив уравнения связей относительно $\dot{x}_i$, он представил их в виде (2.4), назвав величины η_s (в его обозначениях – e_S) характеристиками движения рассматриваемой системы, причем $b_{is} = \partial\dot{x}_i/\partial\eta_S = \partial\ddot{x}_i/\partial\dot{\eta}_S$ ($s = 1, \ldots, l = n - m$). Переходя к выводу уравнений Вольтерры, Маджи преобразовал свои уравнения вида (1.14) (в которых у него вместо L фигурирует кинетическая энергия T, а Q – все активные силы, приложенные к системе) к виду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_r}=\frac{db_{ir}}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}+b_{ir}\frac{\partial T}{\partial x_i}+P_r,\ r=1,\ \ldots,\ l;\ P_r=Q_i b_{ir} \tag{2.11}$$

Вольтерра [31] рассматривал систему N материальных точек, скорости которых в декартовой системе координат связаны с характеристиками движения соотношениями вида (2.4)

$$\dot{x}_i = b_{is}\eta_s,\ i = 1, \ldots, 3N,\ s = 1, \ldots, l$$

где $b_{is} = b_{is}(x_1, \ldots, x_{3N})$. При этом уравнения Маджи (2.11) принимают вид уравнений Вольтерры [31]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_r}=c_{rs}^{(k)}\eta_k\eta_r+P_r,\ k,\ r,\ s=1,\ \ldots,\ l \tag{2.12}$$

$$\left(c_{rs}^{(k)}=m_i b_{ik}\frac{\partial b_{ir}}{\partial x_j}b_{js};\ m_i=m_{i+1}=m_{i+2};\ i,\ j=1,\ \ldots,\ 3N\right)$$

где $T(x_1, \ldots, x_{3N}, \eta_1, \ldots, \eta_l)$ – кинетическая энергия.

Не приводя здесь вывода Маджи уравнений Аппеля из уравнений (1.14), отметим, что их проще вывести непосредственно из уравнения (1.12). Дифференцируя по времени уравнения (2.4), будем иметь $\ddot{x}_i = b_{is}(x)\dot{\eta}_s + \ldots$, где многоточие означает члены, не содержащие $\dot{\eta}_s$. Отсюда находим, что $\partial\ddot{x}_i/\partial\dot{\eta}_s = b_{is}$, вследствие чего из (1.12) получаем уравнения Аппеля

$$\partial S/\partial\dot{\eta}_s=\Pi_s,\ s=1,\ \ldots,\ l \tag{2.13}$$

где $S = m_\nu\ddot{\mathbf{r}}^2{}_\nu/2$ – энергия ускорений, $\Pi_s = \mathbf{F}_\nu \cdot \mathbf{b}_{s\nu}$ – обобщенная сила, отнесенная к квазикоординате π_s [30].

Покажем, наконец, эквивалентность уравнений Кейна уравнениям Пуанкаре. Согласно (1.6) $\delta\mathbf{r}_\nu = \omega_s X_s \mathbf{r}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$, $s = 1, \ldots, l$). Подставляя эти выражения в (1.12), получаем уравнения движения в виде

$$m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu\cdot X_s\mathbf{r}_\nu=\mathbf{F}_\nu\cdot X_s\mathbf{r}_\nu,\ s=1,\ \ldots,\ l \tag{2.14}$$

Для системы с лагранжевыми координатами q_i, стесненной неинтегрируемыми связями

$$\dot{q}_j = b_{js}(t, q)\dot{q}_s + b_j(t, q),\ j = l + 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, l$$

и операторами (1.5) вида

$$X_s f=\frac{\partial f}{\partial q_s}+b_{js}\frac{\partial f}{\partial q_j}$$

уравнения (2.14) совпадают с уравнениями Кейна ([32], уравнения (19))

$$K_{q_s}+K'_{q_s}=0,\ s=1,\ \ldots,\ l$$

которые, следовательно, эквивалентны уравнениям (2.5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00261) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS 93-1621).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Poincare H.* Sur une forme nouvelle des equations de la mecanique // C.R. Acad. sci Paris. 1901. V. 132. P. 369–371.
2. *Četajev N.* Sur les équations de Poincaré // Докл. АН СССР. 1928. № 7. С. 103–104.

3. *Четаев Н.Г.* Об уравнениях Пуанкаре // ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 2. С. 253–262.
4. *Четаев Н.Г.* Уравнения Пуанкаре // Теоретическая механика. М.: Наука, 1987. С. 287–322.
5. *Шурова К.Е.* Варьирование уравнений Пуанкаре // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 1. С. 123–124; 1954. Т. 18. Вып. 3. С. 384.
6. *Шурова К.Е.* Основной инвариант уравнений в вариациях // Вестн. МГУ. Сер. математики, механики, астрономии, физики. 1958. № 3. С. 47–49.
7. *Румянцев В.В.* Об уравнениях движения твердого тела с полостью, наполненной жидкостью // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 1. С. 3–12.
8. *Аминов М.Ш.* Построение групп возможных перемещений // Тр. Межвуз. конф. по прикладной теории устойчивости движения и аналитической механике. Казань: КАИ, 1962. С. 21–30.
9. *Богоявленский А.А.* Циклические перемещения для обобщенного интеграла площадей // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 4. С. 774–777.
10. *Богоявленский А.А.* Теоремы взаимодействия частей механической системы // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 203–208.
11. *Богоявленский А.А.* Свойства возможных перемещений для теорем взаимодействия частей механической системы // ПММ. Т. 31. Вып. 2. С. 377–384.
12. *Фам Гуен.* Об уравнениях движения неголономных механических систем в переменных Пуанкаре–Четаева // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 253–259.
13. *Фан Гуен.* К уравнениям движения неголономных механических систем в переменных Пуанкаре–Четаева // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 5. С. 804–814.
14. *Фам Гуен.* Об одной форме уравнений движения механических систем // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 3. С. 397–402.
15. *Мархашов Л.М.* Об уравнениях Пуанкаре и Пуанкаре–Четаева // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 43–55.
16. *Мархашов Л.М.* Об одном обобщении канонической формы уравнений Пуанкаре // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 157–160.
17. *Мархашов Л.М.* Об одном замечании Пуанкаре // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 724–734.
18. *Мархашов Л.М.* О частных решениях уравнений движения и их устойчивости // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 26–32.
19. *Румянцев В.В.* Об уравнениях Пуанкаре–Четаева // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 3–16.
20. *Румянцев В.В.* Об уравнениях Пуанкаре–Четаева // Докл. РАН. 1994. Т. 338. № 1. С. 51–53.
21. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
22. *Ла Валле-Пуссен Ш.Ж. де.* Курс анализа бесконечно малых. Т. 2. Л.; М.: Гостехиздат, 1933. 469 с.
23. *Арнольд В.М.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
24. *Maggi G.A.* Da alcune nuove forma della equazioni della dinamica applicabile ai sistemi anolonomi // Atti della Reale Accad. Naz. dei Lincei. Rend. Cl. fis. e math. Ser. 5. 1901. V. 10. Fasc. 2. P. 287–291.
25. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.; ОНТИ, 1937. 500 с.
26. *Boltzmann L.* Uber die Form der Lagrange'schen Gleichungen fur nicht holonome, generalisierte Koordinaten // Sitzungsb. der Wiener Akad, der Wissenschaften. Math.-Naturwiss. Kl. 1902. Bd. 140. H. 1–2. S. 1603–1614.
27. *Hamel G.* Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik // Z. Math. und Phys. 1904. Bd. 50. S. 1–57.
28. *Rumyantsev V.V.* Parametric examination of dynamical nonholonomic systems and two problems of dynamics // Differential Equations: Qualitative. Theory. 2nd Colloq. Amsterdam: Horth-Holland, 1987. V. 2. P. 883–919.
29. *Якоби К.* Лекции по динамике. Л.; М.; Гостехиздат, 1936. 270 с.
30. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
31. *Volterra V.* Sopra una classe di equazioni dinamiche // Atti della R. Accad. delle Sci. di Torino. 1897. T. 33. P. 451–475.
32. *Kane T.R.* Dynamics of nonholonomic systems // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1961. V. 28. № 4. P. 574–578.

Москва

Поступила в редакцию
15.IV.1996