ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ПО ОТНОШЕНИЮ К ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Румянцев В.В.

Вычислительный центр АН СССР

Теория устойчивости движения, основы которой разработаны А.М.Ляпуновым [1] и развиты Н.Г.Четаевым [2] и многими другими учеными, является в настоящее время общепризнанной и находит широкие применения во многих областях науки и техники. Наряду с устойчивостью по всем переменным за последние 30 лет интенсивное развитие получила задача об устойчивости движения по отношению к части переменных, постановка которой также принадлежит А.М.Ляпунову [3] . Такая задача интересна с математической точки зрения и важна в прикладных проблемах, когда из требования нормального функционирования объекта достаточно обеспечить его устойчивость лишь на части переменных. Эта задача привлекла внимание многих ученых и вызвала большое число публикаций, содержащих существенные результаты, благодаря чему устойчивость по части переменных в настоящее время можно по праву рассматривать как самостоятельный раздел теории устойчивости движения.

Цель настоящего доклада - дать обзор некоторых результатов исследования устойчивости и стабилизации движения относительно части переменных. Кратко излагаются постановки задач об устойчивости и стабилизации движения по отношению к части фазовых переменных системы. Приводятся формулировки ряда теорем об устойчивости, неустойчивости, асимптотической устойчивости и оптимальной стабилизации движения по части переменных, основанных на идеях метода функций Ляпунова. Доклад составлен по материалам находящейся в печати монографии [4] .

I. Некоторые понятия и определения.

Пусть дана система дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\dot{x} = X(t,x), \quad t \in J = [0, \infty], \quad x \in \mathcal{R}^n, \quad X(t,0) \equiv 0. \qquad (I)$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости невозмущенного движения $x=0$ по отношению к некоторым из переменных $x_1, \dots, x_n$, например по отношению к $x_1, \dots, x_m$ $(m>0,\ n=m+p,\ p \geq 0)$. Обозначим для краткости эти переменные через $y_i = x_i\ (i=1,\dots,m)$, а остальные - через $z_j = x_{m+j}$ $(j=1 \dots p = n-m)$, т.е. представим векторы x и X в виде

$$x = (y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_p)^T \equiv \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad X = (Y_1, \dots, Y_m, Z_1, \dots, Z_p)^T = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix},$$

причем

$$\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{m} y_i^2\right)^{1/2}, \quad \|z\| = \left(\sum_{j=1}^{p} z_j^2\right)^{1/2}, \quad \|x\| = \left((\|y\|)^2 + (\|z\|)^2\right)^{1/2}.$$

Будем предполагать, что:

а) правые части системы (I) определены и непрерывны в области

$$t \in J, \quad \|y\| < H = const, \quad \|z\| < \infty \qquad (2)$$

и удовлетворяют условиям единственности решения,

б) решения системы (I) z - продолжимы; это означает [5], что любое решение $x(t)$ определено при всех $t \in J$, для которых $\|y(t)\| < H$.

Обозначим через: $x = x(t; t_0, x_0)$ решение системы (I), определенное начальными условиями $x(t_0; t_0, x_0) = x_0$; J^+ - максимальный правый интервал, где $x(\cdot; t_0, x_0)$ определено; $B_\varepsilon = \{x \in \mathcal{R}^n,\ \|x\| < \varepsilon$ - открытый шар с центром в начале $x=0$ и радиусом $\varepsilon > 0$; $C_\delta = \{y \in \mathcal{R}^m,\ \|y\| < \delta\}$ - открытый шар с центром в $y=0$

и радиусом $\delta > 0$.

Определение I. Невозмущенное движение $x=0$ называется:

а) y-устойчивым, если $(\forall\varepsilon>0)(\forall t_0\in J)(\exists\,\delta(\varepsilon,t_0)>0)$ $(\forall x_0\in B_\delta)$, $(\forall t\in J^+)$ $\|y(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon$;

б) y - неустойчивым, если $(\exists\varepsilon>0)(\exists t_0\in J)(\forall\delta>0)$ $(\exists x_0\in B_\delta)(\exists t\in J^+)$ $\|y(t;t_0,x_0)\|\geq\varepsilon$;

в) равномерно y-устойчивым, если в п.а) число $\delta=\delta(\varepsilon)$ не зависит от t_0;

г) асимптотически y-устойчивым, если оно y-устойчиво и если $(\forall t_0\in J)(\exists\eta(t_0)>0)(\forall\varepsilon>0)(\forall x_0\in B_\eta)(\exists\sigma(t_0,\varepsilon,x_0),$ $t+\sigma\in J^+)$ $(\forall t\geq t_0+\sigma,\ t\in J)$ $\|y(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon$;

д) эквиасимптотически y-устойчивым, если число $\sigma=\sigma(t_0,\varepsilon)$ в п.г) не зависит от x_0;

е) равномерно асимптотически y-устойчивым, если оно равномерно y-устойчиво и число $\sigma=\sigma(\varepsilon)$ в п.г) не зависит от t_0, x_0.

Отметим, что в определениях п.п. г),д),е) предполагается, что решения уравнений (I), начинающиеся в шаре B_η, существуют на интервале $J=[0,\infty]$, причем все y-компоненты решения асимптотически стремятся к началу:

$$\lim\|y(t;t_0,x_0)\|\to 0 \text{ при } t\to\infty; \tag{3}$$

в случае определения д) это стремление к нулю равномерно по $x_0\in B_\eta$, а в случае е) - равномерно по $x_0\in B_\eta$ и $t_0\in J$.

Аналогичные определения принимаются для множества

$$M=\{x: y=0\}. \tag{4}$$

Определение 2. Множество (4) называется:

а) устойчивым, если $(\forall \varepsilon > 0)(\forall t_0 \in J)(\exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0)$ $(\forall y_0 \in C_\delta)\ (\forall z_0 \in \mathcal{R}^p)(\forall t \in J^+)\ \ \|y(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$;

б) равномерно устойчивым, если число $\delta(\varepsilon)$ в п.а) не зависит от t_0;

в) асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и если $(\forall t_0 \in J)(\exists \Delta(t_0) > 0)(\forall y_0 \in C_\Delta)\ \lim \|y(t; t_0, x_0)\| \to 0$ при $t \to \infty$;

г) равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и число Δ в п.в) не зависит от t_0.

Очевидно, что из устойчивости (равномерной устойчивости и т.д.) множества (4) следует y- устойчивость (равномерная y-устойчивость и т.д.) движения $x = 0$ системы (I).

Будем рассматривать функции Ляпунова - некоторые вещественные однозначные функции $V(t, x),\ V(t, 0) \equiv 0$, непрерывные в области (2) вместе с частными производными $\partial V / \partial t$, $\dfrac{\partial V}{\partial x_s}$ $(s = 1, \ldots, n)$, и их полные производные по времени в силу уравнений возмущенного движения (I)

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s .$$

Определение 3. Функция $a(r)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, $a(r) \in \mathcal{K}$, если $a(r)$ - непрерывная строго возрастающая при $r \in [0, H]$ или при $r \in [0, \infty)$ функция, причем $a(0) = 0$.

Определение 4. Функция Ляпунова $V(t, x)$ называется:

а) y-определенно-положительной, если $(\exists a(r) \in \mathcal{K})$ такая, что для любых (t, x) из области (2) $V(t, x) \geq a(\|y\|)$;

б) допускает бесконечно малый высший предел по y, если

$(\exists\, b(r) \in \mathcal{K})$ такая, что для любых (t,x) из области (2) $|V(t,x)| \leq b(\|y\|)$.

Аналогично определяются функции, знакоопределенные по переменным $x_1, \dots, x_k$ $(m \leq k \leq n)$ и допускающие бесконечно-малый высший предел по этим переменным.

Определение 5. а) Множество точек (t,x) из (2), для которых $V(t,x) > 0$, называется областью $V>0$;

б) функция $W(t,x)$ называется определенно-положительной в области $V>0$, если $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)$ такое, что для всякой точки (t,x) из (2), для которой $V(t,x) \geq \varepsilon$, выполняется неравенство $W(t,x) \geq \delta$.

Отметим, что определение 5 б) эквивалентно выполнению в области $V>0$ неравенства $W(t,x) \geq a(V(t,x))$, $a(r) \in \mathcal{K}$.

2. Общие теоремы об устойчивости по части переменных.

Теорема I [6]. Если существует функция Ляпунова $V(t,x)$ такая, что для некоторой функции $a \in \mathcal{K}$ и любых (t,x) из области (2)

$$V(t,x) \geq a(\|y\|), \quad \dot V(t,x) \leq 0, \tag{5}$$

то движение $x=0$ y-устойчиво.

Дополнения I. Если дополнительно к условиям (5):

а) для некоторой функции $b \in \mathcal{K}$ и любых (t,x) из (2)

$$V(t,x) \leq b(\|x\|), \tag{6}$$

то движение $x=0$ равномерно y-устойчиво [7];

б) для некоторой функции $c \in \mathcal{K}$ и любых (t,x) из (2)

$$V(t,x) \leq c(\|y\|), \tag{7}$$

то множество (4) равномерно устойчиво [8] и при этом необходимо выполняются тождества [9]

$$y(t,0,z)\equiv 0. \qquad (8)$$

Теорема I обобщает теорему Ляпунова об устойчивости [I], в которую она переходит при $m=n$; теорема I с дополнениями I- теорему К.П.Персидского [10] .

Принципиальным для теории устойчивости является вопрос о существовании функций Ляпунова. Положительное решение этого вопроса позволяет сделать заключение об универсальности метода функций Ляпунова.

Теорема I обратима [9] , именно: если X_s и $\frac{\partial X_s}{\partial x_r}$ непрерывны и если движение $x=0$ y-устойчиво, то в области $t\in J$, $\|y\|<h<H$, $\|z\|<\infty$ существует функция Ляпунова $V(t,x)$, удовлетворяющая условиям (5).

Для установления y -неустойчивости можно с успехом применять [6] общую теорему Четаева о неустойчивости [2] :

Теорема 2 . Если существует функция $V(t,x)$, ограниченная в области $V>0$, существующей при всяком $t\geqslant 0$ и любых сколь угодно малых $\|x\|$, производная которой $\dot V(t,x)$ определенно-положительна в области $V>0$, то движение $x=0$ y -неустойчиво.

Формулировка (с точностью до y -неустойчивости) теоремы 2 совпадает с формулировкой теоремы Четаева о неустойчивости; отличие лишь в том, что в теореме Четаева [2] рассматривается область

$$t\in J, \quad \|x\|<H, \qquad (9)$$

а в теореме 2 и определении 5 - область (2).

Подобно тому, как обе теоремы Ляпунова о неустойчивости [I] следуют из теоремы Четаева о неустойчивости, из теоремы 2 могут быть получены аналоги теорем Ляпунова для y -неустойчивости, которые сформулируем в виде следствий [II] :

Следствие I. Если существует функция $V(t,x)$, ограниченная в области (2) и такая, что для некоторых функций $b, c \in \mathcal{K}$ и любых (t,x) из (2)

$$V(t,x) \le b(\|u\|),\ \dot V(t,x) \ge c(\|u\|),\ \|u\| = \Big(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\Big)^{1/2} \qquad \text{(I0)}$$
$$(m \le k \le n),$$

причем для любого $t \in J$ и сколь угодно малой окрестности $x=0$ существуют точки, для которых $V(t,x) > 0$, то движение $x=0$ y-неустойчиво.

Следствие 2. Если существует ограниченная в области (2) функция $V(t,x)$, производная которой

$$\dot V(t,x) = \lambda V(t,x) + W(t,x),\quad \lambda = const > 0,$$

непрерывная функция $W(t,x) \geq 0$, причем для любого $t \in J$ и сколь угодно малой окрестности $x=0$ существуют точки, для которых знаки $V(t,x)$ и $W(t,x)$ совпадают, то движение $x=0$ y-неустойчиво.

Заметим, что в случае, когда $V = V(t,y)$, а $k=m$, теорема 2 и следствие 2 сохраняются без изменений, а в следствии I отпадает необходимость проверки ограниченности функции V в области (2).

Как известно [I2], теорема Четаева и вторая теорема Ляпунова о неустойчивости обратимы, первая теорема Ляпунова о неустойчивости не обратима.

Теорема 3 [I3]. Если существует функция Ляпунова $V(t,x)$ такая, что для некоторых функций $a, b, c \in \mathcal{K}$ и любых (t,x) из (2):

$$a(\|y\|) \le V(t,x) \le b(\|u\|),\ \dot V(t,x) \le -c(\|u\|), \qquad \text{(II)}$$

то движение $x=0$ асимптотически y-устойчиво.

Частные случаи теоремы 3 [14] : если $k=m$, т.е. условия (11) принимают вид

$$a(\|y\|) \leq V(t,x) \leq b(\|y\|), \quad \dot{V}(t,x) \leq -c(\|y\|) \tag{12}$$

или при $k=n$, когда условия (11) имеют вид

$$a(\|y\|) \leq V(t,x) \leq b(\|x\|), \quad \dot{V}(t,x) \leq -c(\|x\|), \tag{13}$$

то движение $x=0$ асимптотически y-устойчиво.

При выполнении условий (11), или (12), или (13) шар $\|x\| < \Delta = b^{-1}(a(H))$ лежит в области y -притяжения точки $x=0$ для любого начального момента времени $t_0 \in J$.

Теорема 3 и ее частные случаи обобщают теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости [1] , в которую они переходят при $m=k=n$.

Подобно тому как теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости дает достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости, условия теоремы 3 обеспечивают равномерную асимптотическую y -устойчивость. Именно, справедливы

Дополнения 2 [7, 8, 9, 15] . Если существует функция Ляпунова $V(t,x)$, удовлетворяющая:

а) условиям (11), то движение $x=0$ асимптотически y-устойчиво равномерно по начальным условиям t_0, x_0 из области

$$t_0 \in J, \quad \sum_{i=1}^{k} x_{i0}^2 < \Delta, \quad -\infty < x_{k+1,0}, \ldots, x_{n0} < \infty \quad (m \leq k \leq n); \tag{14}$$

б) условиям (12), то инвариантное множество (4) равномерно асимптотически устойчиво;

в) условиям (13), то движение $x=0$ равномерно асимптотически y-устойчиво.

Теорема 3 в случае $k=m$ обратима [9] : если в области (2) функции X_s и $\frac{\partial X_s}{\partial x_r}$ $(s,r=1,\ldots,n)$ непрерывны и ограничены и если множество (4) является инвариантным и равномерно асимптотически устойчивым, то в области

$$t_0 \in J \quad , \quad \|y\| < \Delta_0 \quad , \quad \|z\| < \infty$$

существует функция $V(t,x)$, удовлетворяющая условиям (I2). В случае $m<k\leq n$ теорема 3 необратима [4] .

Движение $x=0$, обладающее свойством, указанным в дополнении 2 а), называется асимптотически y-устойчивым в целом по $x_{k+1,0},\ldots,x_{n0}$, т.е. при любых начальных условиях переменных $x_{k+1},\ldots,x_n$.

Представляют интерес также условия асимптотической y-устойчивости в целом, т.е. при любых сколь угодно больших значениях x_0. При этом предполагается, что правые части системы (I) непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решения в области

$$t \in J \quad , \quad \|x\| < \infty. \tag{I5}$$

Теорема 4 [I5]. Если существует функция Ляпунова $V(t,x)$, удовлетворяющая в области (I5) условиям (II), а также условию

$$V(t,x) \to \infty \text{ при } \quad \|u\| \to \infty, \tag{I6}$$

то движение $x=0$ асимптотически y-устойчиво в целом, причем соотношение (3) выполняется равномерно по начальным условиям t_0, x_0 из области (I4), где постоянная Δ может иметь произвольное конечное значение.

Эта теорема обобщает на задачу устойчивости по части переменных теорему Барбашина-Красовского [I6] . Аналогичным образом могут быть получены признаки асимптотической y-устойчивости в целом модификацией других теорем об асимптотической y-устойчивости, в том числе частных случаев теоремы 3, а также излагаемых ниже теорем 5 и 6.

Отметим, что если функция $V(t,x)$ не допускает бесконечно малого высшего предела по y, но удовлетворяет остальным из условий (12), то свойство (3) не будет выполняться, однако для некоторой последовательности $t_i \to \infty$, зависящей от t_0 и x_0, будет выполняться условие $\lim \|y(t_i; t_0, x_0)\| = 0$ при $i \to \infty$ (слабая асимптотическая y-устойчивость [17]). С другой стороны, если функция $\mathcal{Y}(t,x)$ является ограниченной в области (2), то асимптотическая y-устойчивость имеет место. Справедлива

Теорема 5 [17]. Если существует функция Ляпунова $V(t,x)$ такая, что для некоторых функций $a, c \in \mathcal{K}$ и любых (t,x) из области (2)

$$a(\|y\|) \leq V(t,x), \quad \dot{V}(t,x) \leq -c\|y\| \qquad (17)$$

и $(\forall t_0 \in J)(\exists \delta'(t_0) > 0)(\exists N(t_0) > 0)(\forall (t,x) \in E(t_0, \delta') =$

$$= \{t, x : t \geqslant t_0,\ x = x(t; t_0, x_0),\ \|x_0\| < \delta'\}\ \|\mathcal{Y}(t,x)\| \leq N,$$

то движение $x = 0$ асимптотически y-устойчиво.

Заметим, что если $\Delta(t_0)$ таково, что $0 < \Delta \leq \delta'$ и $V(t_0, x) < a(H)$ при $\|x\| < \Delta(t_0)$, то шар $\|x\| < 1$ лежит в области y-притяжения точки $x = 0$ для начального момента t_0.

Теорема 5 необходима; она обобщает теорему Марачкова [18].

Теорема 6 [11]. Если существует функция Ляпунова $V(t,x)$ такая, что для некоторой функции $a \in \mathcal{K}$ и монотонно возрастающей до бесконечности функции $\theta(t)$ $(\theta(0) = 1)$ и любых (t,x) из (2)

$$V(t,x) \geq \theta(t) a(\|y\|), \quad \dot{V}(t,x) \leq 0, \tag{18}$$

то движение $x=0$ эквиасимптотически y-устойчиво.

Эта теорема обобщает теорему Четаева [2] об асимптотической устойчивости. Отметим, что для периодических (или автономных) систем (I), правые части которых в окрестности точки $x=0$ удовлетворяют условию Липшица, эквиасимптотическая y-устойчивость влечет за собой равномерную асимптотическую y-устойчивость [4].

Рассмотрим теперь случай автономной системы (I), когда ее правые части не зависят явно от t.

Теорема 7 [I4, I9, 20]. Предположим, что: I) каждое решение автономной системы (I), начинающееся в некоторой окрестности точки $x=0$, ограничено, 2) существует функция Ляпунова $V(x)$ такая, что для некоторой функции $a \in \mathcal{K}$ и любых x из (2)

$$a(\|y\|) \leq V(x), \quad \dot{V}(x)=0 \quad x \in M_1, \quad \dot{V}(x)<0 \quad x \notin M_1. \tag{I9}$$

Если множество $M_0 = M_1 \cap M_2$, где $M_1 = \{x : \dot{V}(x)=0\}$, $M_2 = \{x : V(x) > 0\}$, не содержит целых полутраекторий при $t \in J$, то движение $x=0$ равномерно асимптотически y-устойчиво.

Теорема 8 [I9]. Предположим, что выполнены условия I) и 2) теоремы 7 и, кроме того: 3) множество $M\{x : y=0\}$ инвариантно, 4) множество $M_1 \setminus M$ не содержит целых полутраекторий при $t \in J$, тогда движение $x=0$ асимптотически y-устойчиво.

Теоремы 7 и 8 обобщают теорему Барбашина-Красовского [I6].

Теорема 9 [I9, 20]. Предположим, что: I) каждое решение автономной системы (I), начинающееся в некоторой окрестности точки $x=0$, z -ограничено; 2) существует функция Ляпунова $V(x)$ такая, что в любой окрестности $x=0$ имеются точки, в которых $V(x)<0$, 3) производная $\dot{V}(x)$ удовлетворяет условию (19). Если множество $M^0 = M_1 \cap M_2$, где $M_2 = \{x: V(x)<0\}$, не содержит целых полутраекторий при $t \in J$, то движение $x=0$ y-неустойчиво.

Теорема 10 [19, 20]. Предположим, что выполнены условия 1)-3) теоремы 9 и, кроме того, 4) $V(0,z) \geq 0$ для $\|z\| < \infty$, 5) множество $M_1 \setminus M \cap M_2$ не содержит целых полутраекторий при $t \in J$, то движение $x=0$ y-неустойчиво.

Теоремы 9 и 10 обобщают теорему Красовского о неустойчивости [12].

Как и в общей теории устойчивости, в теории устойчивости по части переменных разработаны также признаки устойчивости и неустойчивости с использованием двух функций Ляпунова, а также вектор-функций Ляпунова и дифференциальных неравенств, исследованы вопросы сохранения устойчивости при возмущениях и об устойчивости по первому приближению. Изложение этих интересных вопросов (см. [4]) выходит, однако, за рамки нашего доклада.

3. Об оптимальной стабилизации по части переменных.

Рассмотрим дифференциальные уравнения возмущенного движения управляемой системы

$$\dot{x} = X(t,x,u), \quad u \in R^r, \quad X(t,0,0) \equiv 0, \tag{20}$$

правые части которой определены и непрерывны в области

$$t \in J, \quad \|y\| < H, \quad \|z\| < \infty, \quad \|u\| < \infty. \tag{21}$$

Пусть выбран некоторый класс $U = \{u = u(t,x)\}$ управлений $u(t,x)$, определенных и непрерывных в области (2), причем $u(t,0) \equiv 0$. Будем далее предполагать, что система (20) при любом $u(t,x) \in U$ удовлетворяет условиям а) и б) из п. I.

Задача I (об y-стабилизации в классе U) состоит в нахождении управления $u = u(t,x) \in U$, обеспечивающего асимптотическую y-устойчивость движения $x = 0$ в силу системы (20).

Задача 2 (об оптимальной y-стабилизации в классе U) заключается в определении управления $u = u^0(t,x) \in U$, обеспечивающего асимптотическую y-устойчивость движения $x=0$ в силу системы (20), причем для любой функции $u = u^*(t,x) \in U$, решающей задачу I, должно выполняться условие

$$\int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x^0[t], u^0[t])\,dt \le \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x^*[t], u^*[t])\,dt \tag{22}$$

$$\text{при} \quad t_0 \in J,\ x^0[t_0] = x^*[t_0] = x_0,\ \|x_0\| \le \lambda = const. \tag{23}$$

Здесь: $\omega(t,x,u) \geqslant 0$ - непрерывная в области (2I) функция; $x[t]$ - решение системы (20) при $u = u(t,x)$, $u[t] = u(t, x[t])$; постоянная λ или задана заранее по условиям задачи, или имеет тот же смысл, что и величина δ в определении I. Функция $u^0(t,x)$, разрешающая задачу 2, называется оптимальным управлением.

Примем обозначение

$$B[V; t, x, u] = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} \cdot X(t,x,u) + \omega(t,x,u) \tag{24}$$

Теорема II [13, 14]. Если существуют функция $u = u^0(t,x) \in U$ и функция Ляпунова $V^0(t,x)$ такие, что для некоторых функций $a, b, c \in \mathcal{K}$ и любых (t,x) из области (21) выполняются условия:

1) $a(\|y\|) \leq V^0(t,x) \leq b(\|y\|)$,

2) $\omega(t,x,u^0(t,x)) \geq c(\|y\|)$,

3) $B[V^0, t, x, u^0(t,x)] = 0$,

4) $B[V^0, t, x, u] \geq 0$ каковы бы ни были u,

то функция $u^0(t,x)$ разрешает задачу 2 об оптимальной y-стабилизации и при этом

$$\int_{t_0}^{\infty}\omega(t,x^0[t],u^0[t])dt = \min_u \int_{t_0}^{\infty}\omega(t,x[t],u[t])dt = V^0(t_0, x(t_0)) \tag{25}$$

для всех начальных условий x_0 из области (23).

Теорема 11 обобщает теорему Красовского об оптимальной стабилизации [21] ; она представляет собою модификацию частного случая ($k=m$) теоремы 3 с учетом соображений метода динамического программирования Беллмана.

Используя различные другие теоремы об асимптотической устойчивости, аналогичным образом можно получить ряд иных признаков оптимальной стабилизации по части переменных.

Отметим, что изложенные выше теоремы установлены для исследования устойчивости и стабилизации систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, однако они могут применяться во многих случаях (при надлежащей их модификации) также для систем и процессов, описываемых совместными системами обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных [4] .

Литература

I. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. - М.-Л.: Гостехиздат, 1950. - 471 с.

2. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. - М.: Наука, 1965. - 204с.

3. Ляпунов А.М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Собр. соч., Т.П. - М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. - С.272-331.

4. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. - М.: Наука, 1987 (в печати). - 254 с.

5. Corduneanu C. Sur la stabilité partielle//Revue Roumaine de Math. pure et appl. - 1964. - V.9, N 3. - P.229-236.

6. Румянцев В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных//Вестн. МГУ . Сер.мат., механ., физ., астрон., хим. - 1957. - № 4. - С. 9-16.

7. Halanay A. Differential equation : stability, oscillations, time lags. - N.Y.: Acad. Press, 1966 (Translation of the Rumanian edition. - Bucharest, 1963).

8. Rouche N., Peiffer K. Le theorème de Lagrange-Dirichlet et la deuxieme methode de Liapounoff//Ann.Soc. scient. Bruxelles. Ser. 1. - 1967. - V. 81, N 1. - P. 19-33.

9. Озиранер А.С. К вопросу об устойчивости движения относительно части переменных//Вестн. МГУ, сер. матем.,механ. - 1971. - № I. - С. 92-100.

10.Персидский К.П. К теории устойчивости решений дифференциальных уравнений//УМН. - 1946. - Т.I, вып.5-6. - С.250-255.

11.Румянцев В.В. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных//ПММ. - 1971. - Т. 35, вып. I. - С. 147-152.

I2. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. - М.: Физматгиз, I959. - 2II с.

I3. Румянцев В.В. Об оптимальной стабилизации управляемых систем//ПММ. - I970. - Т.34, вып. 3. - С. 440-456.

I4. Rumyantsev V.V. On the stability with respect to a part of the variables//Sump.math. - V.6. - Meccanica non-lineare e stabilità.- 23-26.2.1970.-L.-N.Y.:Acad.Press.-1971.-P.243-265.

I5. Озиранер А.С., Румянцев В.В. Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных// ПММ. - I972. - Т. 36, вып. 2. - С. 364-384.

I6. Барбашин Н.А., Красовский Н.Н. Об устойчивости движения в целом//Докл. АН СССР. - I952. - Т. 86, № 3. - С.453-456.

I7. Peiffer K., Rouche N. Liapounov's second method applied to partial stability//J.Mecanique.-1969.-V.8.N2.-P.323-334.

I8. Марачков В.П. Об одной теореме устойчивости//Изв. физ.-мат. об-ва и научно-исслед. ин-та математики и механики при Казанск.ун-те. Сер. 3 - I940. - Т. I2. - С. I7I-I74.

I9. Risito C. Sulla stabilita asintotica parziale//Ann.Math. Pura Appl. - 1970. - V. 84. - P. 279-292.

20. Озиранер А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных//ПММ. - I973. - Т. 37, вып. 4. - С. 659-665.

2I. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений// В кн.:Малкин И.Г. Теория устойчивости движения; Дополнение 4. - М.: Наука, I966. - С. 475-5I4.