МЕХАНИКА И НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ПРОГРЕСС

В четырех томах

Москва
«Наука»
1987

МЕХАНИКА И НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ПРОГРЕСС

Том первый

ОБЩАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Ответственные редакторы:

академик А. Ю. Ишлинский,

академик Н. Н. Красовский,

член-корреспондент АН СССР В. В. Румянцев,

доктор физико-математических наук

В. Н. Рубановский

Москва

«Наука»

1987

УДК 531

ОБ ОСНОВНЫХ ЗАКОНАХ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В. В. Румянцев

В 1987 г. исполняется 300 лет со дня публикации «Математических начал натуральной философии» И. Ньютона, заложивших основы классической механики и классической физики. Аксиомы или законы движения Ньютона на протяжении прошедших трех столетий подвергались той или иной критике, но и в настоящее время они являются надежной основой теоретической механики и ее технических приложений. Однако прочтение и понимание этих законов различными авторами далеко не однозначно, о чем свидетельствуют, например, предпринимавшиеся в XIX в. попытки вывода второго закона Ньютона из закона независимости действия сил или современные дискуссии по основам механики.

В докладе приводятся и обсуждаются определения и законы Ньютона. Основное внимание сосредоточено на современных формулировках законов Ньютона, анализе принципа Д'Аламбера и аксиомы освобождаемости, а также законов количества движения, момента количеств движения и кинетической энергии.

1. Когда изучаешь «Начала» И. Ньютона [1], поражаешься грандиозности, глубине и широте охвата явлений материального мира, огромному числу результатов, выраженных в виде теорем, лемм и следствий из них, полученных математическими методами и во многих случаях подтвержденных экспериментами, специально поставленными автором. Сам Ньютон рассматривал свое сочинение «как математические основания физики», задача которой, по его мнению, «состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам изъяснить остальные явления» [1, с. 3]. И эту задачу Ньютон блестяще выполнил, построив цельную систему мира на основе открытого им закона всемирного притяжения.

Лагранж [2] назвал «Начала» «величайшим из произведений человеческого ума», составившим «эпоху превращения механики в новую науку». По мнению С. И. Вавилова, «в истории естествознания не было события более крупного, чем появление «Начал» Ньютона» [3].

2. По Ньютону, теоретическая или «рациональная механика есть учение о движениях, производимых какими бы то ни было силами, и о силах, требуемых для производства каких бы то ни было движений, точно изложенное и доказанное» [1, с. 2].

Под движением подразумевается механическое движение, т. е изменение взаимного положения материальных тел или частей тела с течением времени.

В качестве характеристики материальности тела Ньютон ввел в науку новое понятие — массу тела, определив ее следующим образом:

«Определение I. Количество материи (масса) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объему ее...

Определяется масса по весу тела, ибо она пропорциональна весу, что мною найдено опытами над маятниками, произведенными точнейшим образом» [1, с. 23]. Как отметил А. Н. Крылов, «ни одно определение Ньютона не вызывало столько критических замечаний и столько толкований, как это... До Ньютона понятие о массе не вводилось и рассматривался лишь вес... и при старинной терминологии понятно, что плотность не определялась как масса единицы объема вещества, а говорилось, что плотность тела пропорциональна его весу и обратно пропорциональна объему» [1, с. 23—24]. По Ньютону, масса тела неизменна и обладает свойством аддитивности.

За меру движения Ньютон принял количество движения.

«Определение II. Количество движения есть мера такового, устанавливаемая пропорционально скорости и массе» [1, с. 24].

«Определение III. Врожденная сила материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Эта сила всегда пропорциональна массе и если отличается от инерции массы, то разве только воззрением на нее.

От инерции материи происходит, что всякое тело лишь с трудом выводится из своего покоя или движения. Поэтому „врожденная сила" могла бы быть весьма вразумительно названа „силою инерции". Эта сила проявляется телом единственно лишь когда другая сила, к нему приложенная, производит изменение в его состоянии. Проявление этой силы может быть рассматриваемо двояко: и как сопротивление, и как напор. Как сопротивление, поскольку тело противится действующей на него силе, стремясь сохранить свое состояние; как напор, поскольку то же тело, с трудом уступая силе сопротивляющегося ему препятствия, стремится изменить состояние этого препятствия» [1, с. 25—26].

«Определение IV. Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Сила проявляется единственно только в действии и по прекращении действия в теле не остается. Тело продолжает затем удерживать свое новое состояние вследствие одной только инерции» [1, с. 26].

Обратим внимание на отмеченное Ньютоном отличие «силы инерции» от приложенной или ускорительной силы: если последняя изменяет состояние движения данного тела, то первая противится в этом действующей силе, одновременно стремясь изменить состояние другого тела, действующего на данное. Иными словами, сила инерции данного тела не относится к категории приложенных к нему ускоряющих сил.

В связи с этим напомним, что Эйлер, считая неудачным выражение «сила инерции», писал: «Но если под силой понимать какую-то причину, изменяющую состояние тела, то здесь ее нужно понимать совсем не в этом смысле: проявление инерции в высшей степени отлично от того, которое свойственно... обычным силам. Поэтому для избежания какой-либо путаницы на этой почве мы опустим слово „сила“ и будем рассматриваемое свойство тел называть просто инерцией» [4, с. 337].

В поучении Ньютон подчеркивает необходимость разделения понятий пространства и времени на «абсолютные и относительные, истинные и кажущиеся, математические и обыденные.

I. Абсолютное, истинное математическое время само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему протекает равномерно и иначе называется длительностью...

II. Абсолютное пространство по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным» [1, с. 30].

Дав эти понятия, Ньютон отметил, что «возможно... не существует (в природе) такого равномерного движения, которым время могло бы измеряться с совершенной точностью... Может оказаться, что в действительности не существует покоящегося тела, к которому можно было бы относить места и движения прочих» [1, с. 32]. И далее: «Истинное абсолютное движение не может ни произойти, ни измениться иначе как от действия сил, приложенных непосредственно к самому движущемуся телу, тогда как относительное движение тела может быть и произведено, и изменено без приложения сил к этому телу, достаточно, чтобы силы были приложены к тем телам, по отношению к которым это движение определяется...» [1, с. 34].

После изложения данных определений и понятий Ньютон следующим образом сформулировал аксиомы, или законы движения:

«**Закон I.** Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние».

«**Закон II.** Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует».

«**Закон III.** Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе, взаимодействия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны».

«С л е д с т в и е I. При силах совокупных тело описывает диагональ параллелограмма в то же самое время, как его стороны при раздельных» [1, с. 39—41].

Этп законы даны Ньютоном как постулаты, суммирующие наблюдения и опыт человечества: частные случаи законов I и II и следствия I формулировались и до Ньютона рядом ученых, в особенности Галилеем и Гюйгенсом, закон III установлен Ньютоном. Закон инерции был открыт Галилеем при проведении опытов по движению тел по наклонной плоскости, но у него этот закон не играл особой роли; Ньютон же поставил его во главу угла своей механики, рассматривая инерцию как общее свойство материи.

На основе аксиом, или законов движения, Ньютон далее «при помощи математических предложений» решает многочисленные задачи «нахождения истинных движений тел по причинам, их производящим, по их проявлениям и по разностям кажущихся движений и, наоборот, нахождения по истинным или кажущимся движениям их причин и проявлений» [1, с. 37], т. е., говоря современным языком, решает прямую и обратную задачи механики.

Именно таким путем, опираясь на законы Кеплера, Ньютон установил знаменитый

Закон всемирного тяготения. Два тела притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Установление Закона всемирного тяготения позволило Ньютону построить свою Систему мира.

Основы механики Ньютона завоевали всеобщее признание далеко не сразу, а в длительной упорной борьбе, прежде всего с картезианцами, последователями Декарта, а также с последователями Лейбница, о чем свидетельствует предисловие Р. Котеса ко второму изданию «Начал» в 1713 г.

В последующие после вывода в свет «Начал» годы и столетия многими авторами предпринимались попытки модификации аксиом Ньютона и в той или иной степени замены их другими положениями. Однако, как подчеркнули Томсон и Тэт [5], «всякая попытка заменить законы Ньютона кончалась крайней неудачей».

3. Изложим теперь математическое выражение и современную трактовку законов Ньютона.

Теоретическая механика, как и любая другая естественная наука, использующая математические методы, вводит в рассмотрение некоторые идеальные модели реальных пространств, времени и материальных тел. Моделями тел в механике являются материальные точки, системы материальных точек, абсолютно твердые тела, сплошные среды, созданные в процессе расширения изучаемых классов движения реальных тел.

Под словом «тело» в законах Ньютона понимается теперь свободная материальная точка (т. е. геометрическая точка, положение и скорость которой не стеснены какими-либо условиями), обладающая массой m, определяемой по весу P тела:

$$m = P/g, \tag{1}$$

где g — ускорение свободного падения. Постоянная m, определяемая формулой (1), называется весомой, или гравитационной, массой тела, моделируемого материальной точкой.

В качестве моделей реальных пространства и времени, которые, как известно, являются формами существования материи, Ньютон принял простейшие из возможных, постулировав существование абсолютных пространства и времени, существующих независимо от материи и не связанных одно с другим.

Под абсолютным пространством понимается обычное неподвижное трехмерное евклидово пространство, однородное и изотропное. Опыт подтверждает, что сравнительно небольшие части физического пространства можно с большой степенью точности считать евклидовыми.

Считается, что абсолютное время течет само по себе от прошлого к будущему и одинаково во всех точках пространства и для всех наблюдателей, независимо от их положения и движения.

Определение в системе мира положения абсолютной системы координат и указание способов измерения абсолютного времени составляют задачу астрономии и физики.

Фактически Ньютон в своих исследованиях движений планет связывал абсолютное пространство с центром тяжести Солнечной системы и «неподвижными» звездами, а за единицу абсолютного времени принимал средние солнечные сутки.

Развитие науки показало, что ньютоновские модели пространства и времени оказались весьма удачными моделями реальных пространства и времени, сохранившими свое значение и в наше время.

Наблюдения и опыт подтверждают, что материальные тела механически воздействуют одно на другое, т. е. или изменяют движение, или деформируют одно другое, причем эти воздействия взаимны.

Количественная мера механического взаимодействия тел (или механического действия на тело полей), характеризующая величину и направление действия, называется силой, обозначаемой связанным вектором **F**. Объяснение физической природы сил не входит в задачу механики.

Следует подчеркнуть, что аксиомы Ньютона справедливы в абсолютной системе отсчета, существование которой постулируется первым законом Ньютона, а именно: существует система отсчета, по отношению к которой изолированная (т. е. не взаимодействующая с какими-либо другими материальными телами) или неизолированная, но находящаяся под действием уравновешивающейся системы сил материальная точка покоится или совершает равномерное прямолинейное движение. При этом покой и равномерное прямолинейное движение равноправны и механически неотличимы; они представляют собою естественные состояния тел. Способность материальных тел пребывать в этих естественных состояниях называется инерцией или инертностью материи.

Рассматривая движение тела по отношению к абсолютной системе координат, можно установить, действуют на него силы или не действуют: если ускорение равно нулю, то силы не действуют, а если тело имеет ускорение, то оно находится под действием некоторой силы, т. е. взаимодействует с другими телами.

Под термином «количество движения», о котором говорится во II законе, понимается произведение $m\mathbf{v}$ — массы m тела на его скорость $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$. При действии силы $\mathbf{F}$ материальная точка получает ускорение $\mathbf{w} = \ddot{\mathbf{r}} = d\mathbf{v}/dt$, направленное по силе. Это означает, что сила $\mathbf{F}$, являющаяся мерой механического взаимодействия тел, представляет собою в механике Ньютона силу ускоряющую. По определению Лагранжа, «динамика — это наука об ускоряющих и замедляющих силах и о переменных движениях, которые они должны вызывать» [2].

Математически II закон Ньютона выражается уравнением

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}, \tag{2}$$

которое представляет собою основное уравнение динамики свободной точки. В случае $m = \text{const}$ уравнение (2) принимает вид

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}. \tag{3}$$

Согласно этому уравнению, ускорение точки пропорционально приложенной силе и обратно пропорционально массе точки. Таким образом, данная сила вызывает тем меньшее ускорение точки, чем больше масса, т. е. масса характеризует инерцию точки, ее способность сопротивляться изменению движения.

Уравнение (3) позволяет по известным приложенной силе $\mathbf{F}$ и ускорению $\mathbf{w}$ измерить инертную массу тела

$$m = \mathbf{F}/\mathbf{w}, \tag{4}$$

обратно пропорциональную ускорению $\mathbf{w}$, вызываемому данной силой $\mathbf{F}$. Выше формулой (1) была определена гравитационная масса, пропорциональная весу тела P. Как показывает опыт, гравитационная масса (1) численно равна (с точностью до 10^{-12}) инертной массе, определяемой формулой (4). По современным представлениям масса является одной из существенных характеристик материи — мерой ее как инертных, так и гравитационных свойств. В то же время ныне проводится различие между массой тела и количеством вещества: согласно международной системе единиц СИ, количеством вещества называется число структурных механически неделимых единиц вещества, за единицу количества вещества принят моль, равный 0,012 кг изотопа углерода ^{12}C в невозбужденном состоянии при нормальной температуре.

Заметим, что с помощью уравнения (3) силу можно определять динамически вызываемым ею ускорением: сила есть векторная величина $\mathbf{F}$, приложенная к материальной точке и равная произведению массы m точки на ее ускорение $\mathbf{w}$.

Таким образом, II закон Ньютона дает уравнение, связывающее массу, силу и ускорение материальной точки, из которого можно найти одну из входящих в него величин при известных (из независимых измерений) двух других. Это же уравнение позволяет решать обе основные задачи механики: по данной силе $\mathbf{F}$ определить закон движения материальной точки или по известному закону движения точки определить вызывающую это движение силу. Заметим, что в случае $\mathbf{F} = 0$ уравнение (3) принимает вид

$$\mathbf{w} = 0, \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = \mathbf{const},$$

вследствие чего некоторые авторы считают, что I закон есть частный случай II закона. В свете ранее сказанного о сущности первого закона такое мнение неправильно.

III закон Ньютона является основой механики системы материальных точек, он указывает источник силы, действующей на данное тело. Этим источником является некоторое другое тело (или поле), которое, в свою очередь, находится под воздействием первого тела, т. е. изменение движения данного тела может происходить лишь в результате его взаимодействия с некоторым другим телом или полем. Если воздействие $\mathbf{F}_{12}$ второго тела на первое условимся называть действием, а воздействие $\mathbf{F}_{21}$ первого на второе — противодействием, то, согласно III закону:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \tag{5}$$

Записывая уравнения вида (3) для двух взаимодействующих точек с массами m_1 и m_2:

$$m_1\mathbf{w}_1 = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2\mathbf{w}_2 = \mathbf{F}_{21},$$

перепишем равенство (5) в виде

$$\mathbf{F}_{21} = -m_1\mathbf{w}_1, \tag{6}$$

означающем, что сила воздействия $\mathbf{F}_{21}$ первого тела на второе, приложенная ко второму телу, представляет собою силу сопротивления изменению движения первого тела, т. е. его силу инерции [1], что находится в полном соответствии с данным Ньютоном пояснением к его определению III.

С учетом (6) равенство (5) можно записать также в виде

$$\mathbf{F}_{12} - m_1\mathbf{w}_1 = 0. \tag{7}$$

Равенство (7) означает, что в каждый момент времени существует равновесие между действующей на первое тело силой $\mathbf{F}_{12}$ и его силой инерции $-m_1\mathbf{w}_1$, приложенной ко второму телу.

Взаимодействия тел могут происходить в разнообразных физических условиях, так что ускорения, получаемые телами в результате взаимодействия, могут изменяться в зависимости от положения, движения и физического состояния взаимодействующих тел в весьма широких пределах, но всегда отношение ускорений обоих тел остается одним и тем же при любых опытах с одними и теми же телами

$$w_1/w_2 = m_2/m_1. \tag{8}$$

Это отношение представляет собою постоянную величину, характеризующую данные два тела и могущую служить для определения массы одного из взаимодействующих тел, если масса другого известна.

Таким образом, вторая и третья аксиомы Ньютона содержат, помимо законов, определение способов измерения массы и силы. Силы, удовлетворяющие законам II и III, называются ньютоновскими силами [7].

Следствие I из трех законов Ньютона в настоящее время принято называть законом IV. Согласно этому закону, если на материальную точку действуют одновременно две силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, направленные по сторонам AB и AC параллелограмма $ABCD$, построенного на силах, то эти силы можно заменить их равнодействующей, равной диагонали AD параллелограмма, и, наоборот, разложить любую силу, направленную по AD, на составляющие AB и BD [1, следствие II, с. 42]. Таким образом, закон сложения сил, или закон параллелограмма сил, представляет собою в то же время закон независимости действия сил на одну и ту же материальную точку.

Отметим, что этот закон несовместим, вообще говоря, с функциональной зависимостью сил от ускорений точек [6].

Наряду с абсолютной системой координат в теоретической механике рассматривают также различные подвижные системы координат, связанные с каким-либо телом отсчета, течение времени в которых, а также размеры абсолютно твердых тел считаются такими же, как и в абсолютной системе координат. Представление о неизменности течения времени приводит к тому, что в классической механике принимается возможность мгновенной передачи взаимодействий или сигналов из одной точки пространства в другую.

Согласно теореме Кориолиса, ускорение $\mathbf{w}$ некоторой точки в ее движении относительно абсолютной системы координат равно геометрической сумме трех ускорений

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c, \tag{9}$$

где $\mathbf{w}_r$ — ускорение точки в ее движении по отношению к подвижной системе координат; $\mathbf{w}_e$ — переносное ускорение, равное ускорению той точки подвижной системы, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка; $\mathbf{w}_c$ — кориолисово (поворотное) ускорение, зависящее от угловой скорости вращения подвижной системы и относительной скорости точки.

Уравнение (3) с учетом (9) принимает вид уравнения относительного движения

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} - m\mathbf{w}_e - m\mathbf{w}_c, \tag{10}$$

описывающего движение точки по отношению к подвижной системе координат. Это уравнение отличается от уравнения (3) абсолютного движения наличием в его правой части слагаемых $-m\mathbf{w}_e$ и $-m\mathbf{w}_c$, имеющих размерность силы и называемых силой инерции переносного движения и кориолисовой силой инерции соответственно. Таким образом, относительное движение по отношению к подвижной системе координат является таким же, как если бы эта система была неподвижной, а к действующим на точку силам были присоединены переносная и кориолисова силы инерции. Эти силы называются иногда фиктивными, так как они возникают не вследствие взаимодействия с другими материальными телами, а благодаря движению подвижной системы координат, причем при переходе от одной подвижной системы к другой они могут существенно меняться; третий закон Ньютона для них места не имеет.

Если подвижная система координат движется поступательно, равномерно и прямолинейно, то $\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_c = 0$ и $\mathbf{w} = \mathbf{w}_r$. При этом уравнение (10) имеет точно такой же вид, как и уравнение (3). Физически это означает, что законы механики в системах координат, движущихся поступательно, прямолинейно и равномерно относительно абсолютной системы, формулируются точно так же, как и в абсолютной системе, при условии инвариантности времени и все такие системы отсчета, называемые галилеевыми или инерциальными, равноправны и эквивалентны между собой с точки зрения законов механики. Это составляет содержание принципа Галилея — принципа относительности классической механики, приводящего, как уже отмечалось выше, к отказу от постулированного Ньютоном абсолютного пространства, но сохраняющего абсолютное время.

Переход от одной инерциальной системы к другой инерциальной системе математически выражается соотношениями вида

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}t, \quad t = t', \tag{11}$$

где $\mathbf{r}$, t и $\mathbf{r}'$, t' — радиус-векторы одной и той же точки и время в двух системах координат, вторая из которых движется относительно первой с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Преобразования (11) носят название преобразований Галилея. Они оставляют неизменным уравнение (3), иначе говоря, основное уравнение динамики ковариантно по отношению к преобразованиям Галилея.

Подвижные системы отсчета, движение которых отличается от поступательного, прямолинейного и равномерного, называются неинерциальными системами отсчета. В таких системах основное уравнение динамики (3) должно быть заменено уравнением (10).

В случае системы N свободных материальных точек уравнения движения вида (3) записываются для каждой из точек системы в виде

$$m_i\mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij} \quad (i = 1, \ldots, N). \tag{12}$$

Здесь $\mathbf{F}_i$ — равнодействующая внешних сил, приложенных к i-й точке, источниками которой являются тела, не входящие в рассматриваемую материальную систему; $\mathbf{F}_{ij}$ — внутренние силы взаимодействия между точками системы, удовлетворяющие III закону Ньютона:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}, \quad \mathbf{F}_{ii} = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, N). \tag{13}$$

В силу III закона внутренние силы представляют собою систему уравновешивающихся сил, эквивалентную нулю:

$$\sum_{i,\ j} \mathbf{F}_{ij} = 0, \qquad \sum_{i,\ j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = 0. \tag{14}$$

4. Иногда высказывается мнение, что Ньютон занимался лишь динамикой свободных тел. Однако это мнение неправильно: в «Началах» дано решение ряда задач о несвободном движении материальной точки.

В качестве примера укажем на теорему о независимости времени каждого размаха циклоидального маятника под действием центростремительной силы, пропорциональной расстоянию до центра, от величины размаха (предложение **LI**, теорема XVIII). При этом Ньютон разлагает действующую на тело силу, пропорциональную СТ [1, фиг. 92], на силы, направленные по СХ и ТХ. «Первая из этих сил, как направленная прямо по нити РТ, лишь натягивает эту нить и вполне уничтожается ее сопротивлением, не производя более никакого действия. Вторая же сила ТХ, действующая на тело по касательной к циклоиде в сторону к Х, ускоряет движение тела по этой кривой».

Переводя сказанное на язык формул, очевидно, что в этой задаче дифференциальные уравнения движения можно записать в виде

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{N}, \tag{15}$$

где **F** — заданная сила; **N** — нормальная реакция связи. Уравнение (15) содержит в себе, очевидно, суть сформулированного впоследствии принципа освобождаемости.

Из истории механики известно, что при переходе к изучению движения тел, связанных между собой каким-либо образом, например посредством нитей или стержней, к которым они прикреплены, возникли большие трудности, обусловленные тем, что связанные между собой тела не могут свободно следовать приложенным к ним силам, вследствие чего они развивают между собой воздействия, заранее неизвестные и изменяющие их движения.

Первой и наиболее простой задачей такого рода исторически оказалась задача о центре качания физического маятника, решением которой занимались многие выдающиеся ученые (Декарт, Гюйгенс, Бернулли, Герман и др.), предложившие различные методы. Особенно интересными оказались методы, предложенные Я. Бернулли (1703 г.) и Германом (1716 г.). По Я. Бернулли, движения, которые получают тела, образующие маятник, как бы состоят из движений, им сообщаемым, и из других движений, которые к ним прибавляются или вычитаются и которые должны уравновесить одно другое, в результате чего маятник должен сохранять равновесие. Это решение Бернулли содержит в себе, как увидим, зерно принципа Д'Аламбера. Герман исходил из того, что силы, под влиянием которых должны двигаться частицы, образующие маятник, эквивалентны тем силам, которые получаются под действием их тяжести, вследствие чего первые, если направить их в противоположную сторону, должны находиться в равновесии с последними. Позднее Эйлер развил этот метод, а Лагранж вернулся к нему в данной им формулировке принципа Д'Аламбера.

Общий метод, с помощью которого можно выразить в виде уравнений любую проблему механики, был предложен Д'Аламбером в 1743 г. [8]. Этот метод базируется на принципе Д'Аламбера, которому, как никакому другому принципу динамики, оказалось суждено претерпеть самые разноречивые толкования. Свой принцип Д'Аламбер высказал, рассматривая задачу о движении систем тел, соударяющихся произвольным образом или тянущих одно другое при помощи нитей или жестких стержней. Целью Д'Аламбера, по его словам, было «показать, каким образом все задачи динамики можно решать единым и притом весьма простым и прямым методом, состоящим в сочетании принципов равновесия и сложения движений» [8]. Суть этого принципа в трактовке самого Д'Аламбера, в более сжатой форме выраженной Лагранжем, состоит в следующем. «Если нескольким телам сообщить движения, которые они вынуждены изменять вследствие взаимодействий между ними, то... эти движения можно рассматривать как составленные из тех движений, которые тела фактически получают, и из других движений, которые уничтожаются; отсюда следует, что эти последние должны быть такими, что если бы тела находились исключительно под их воздействием, то они бы взаимно друг друга уравновесили» [2].

Под движением Д'Аламбер разумеет скорость с учетом ее направления.

Отметим, что в авторской формулировке принципа Д'Аламбера нет упоминания ни о приложенных к телам силах, ни о силах инерции.

Рассматривая случай непрерывных движений, обозначим через $\mathbf{w}_\nu^* = \mathbf{F}_\nu/m_\nu$ ускорения точек несвободной материальной системы в том движении, которое они бы получили под действием сил $\mathbf{F}_\nu$, если бы были свободными, и через $\mathbf{w}_\nu$ — фактически получаемые ими ускорения, тогда ускорения точек в движениях, которые уничтожаются, или, как говорят, «теряются», определяются разностями $\mathbf{w}_\nu^* - \mathbf{w}_\nu$. Такие «потерянные» ускорения могут быть вызваны «потерянными» силами

$$\mathbf{P}_\nu = m_\nu(\mathbf{w}_\nu^* - \mathbf{w}_\nu) = \mathbf{F}_\nu - m_\nu\mathbf{w}_\nu. \qquad (16)$$

Принцип Д'Аламбера. Во всяком движении системы потерянные силы в каждый момент уравновешиваются при посредстве связей системы [9]. Таким образом, принцип Д'Аламбера приводит законы движения связанных тел под действием заданных сил к законам их равновесия под действием «потерянных» сил, т. е. придает уравнениям динамики форму уравнений статики. Однако неправильно было бы говорить, как это иногда бывает, что принцип Д'Аламбера сводит задачу динамики к задаче статики.

В дальнейшем принцип Д'Аламбера стали рассматривать как дополнительный к законам Ньютона в динамике несвободных систем. Помимо приведенной, существуют и другие формулировки принципа Д'Аламбера, из которых укажем лишь некоторые, предварительно дав определение связей и формулировку принципа освобождаемости.

Связями, наложенными на механическую систему, называются условия, стесняющие положения или движения точек системы.

Так как под действием заданных сил $\mathbf{F}_\nu$ точки системы, стесненной связями, движутся иначе, нежели свободные материальные точки, то это свидетельствует о том, что на точки системы, кроме сил $\mathbf{F}_\nu$, действуют также некоторые дополнительные силы $\mathbf{R}_\nu$, благодаря которым выполняются условия, налагаемые связями. Эти силы обязаны своим происхождением наличию связей и называются реакциями связей на точки системы. Такой взгляд не противоречит III закону Ньютона, поскольку связи всегда реализуются так или иначе с помощью некоторых материальных приспособлений [10], которые и являются физическими источниками реакций. Сила, с которой материальная точка действует на связь, равна и прямо противоположна реакции связи. В отличие от заданных сил $\mathbf{F}_\nu$, называемых также активными силами, реакции связей $\mathbf{R}_\nu$ заранее неизвестны; они называются пассивными силами, так как зависят не только от осуществляющих связи механизмов, но и от активных сил. Для определения реакций необходимо принять во внимание не только вид уравнений связей, но и их физические характеристики, которые должны заранее задаваться.

Принцип освобождаемости. Действия связей на материальные точки полностью характеризуются реакциями связей.

Согласно этому принципу материальные точки, стесненные связями, могут рассматриваться как свободные при условии приложения к ним, кроме заданных сил, реакций связи. Тогда в согласии со II и IV законами Ньютона уравнения движения несвободных точек можно записать в виде уравнений

$$m_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu \; (\nu = 1, \ldots, N), \qquad (17)$$

где $\mathbf{R}_\nu$ обозначает равнодействующую реакций связей, приложенных к ν-й точке. Очевидно, уравнения (17) имеют вид уравнения (15), фактически использованного Ньютоном.

Сравнивая (16) и (17), заключаем, что справедливы равенства

$$\mathbf{P}_\nu + \mathbf{R}_\nu = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, N), \qquad (18)$$

которые приводят к следующей переформулировке принципа Д'Аламбера.

При движении несвободной материальной системы потерянные силы уравновешиваются в каждый момент реакциями связей.

Перепишем теперь уравнения (18) в виде уравнения (7)

$$\mathbf{F}_\nu + \mathbf{S}_\nu + \mathbf{R}_\nu = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, N), \qquad (19)$$

где введено обозначение $\mathbf{S}_\nu = -m_\nu \mathbf{w}_\nu$ для ньютоновой силы инерции точки. Равенства (19) позволяют дать еще одну формулировку принципа Д'Аламбера.

Если к точкам несвободной системы наряду с заданными силами $\mathbf{F}_\nu$ приложить силы инерции $\mathbf{S}_\nu$, то совокупность этих сил уравновешивается реакциями связей $\mathbf{R}_\nu$.

Эта формулировка принципа Д'Аламбера, впервые предложенная в курсе механики Делоне (1856 г.), вошла затем почти во все учебники, а также легла в основу кинетостатики — раздела технической механики, применяющего методы статики для нахождения динамических реакций связей, если известен закон движения системы.

Делоне, предложив прикладывать силу инерции какой-либо точки к этой же точке, подчеркивал, что эта операция носит условный характер [11]. Эта точка зрения разделялась и многими другими авторами. Так, С. А. Чаплыгин, говоря о силе инерции какой-либо материальной точки, писал: «В действительности такой силы нет, это — просто механическая величина, и вводится она только как очень удобный образ для упрощения способа составления дифференциальных уравнений движения» [12, с. 104].

Принцип Д'Аламбера составил «эпоху в механике системы, потому что благодаря ему оказалось возможным всякую задачу динамики привести к математическому исследованию» [12, с. 103]. Однако, по справедливому мнению Дж. Эри (Airy G.), «сам по себе принцип не является ни новым физическим принципом, ни каким-либо дополнением к существующим физическим принципам. Но он представляет собою удобное сочетание механических рассуждений, которое приводит к простому и весьма изящному способу решения задач» [13, с. 64]. Добавим, что все задачи теоретической механики, решаемые при помощи принципа Д'Аламбера, можно решить и без него, например непосредственно применяя уравнения вида (17), составленные на основе принципа освобождаемости. В этом смысле принцип Д'Аламбера эквивалентен принципу освобождаемости [11], восходящему к Ньютону.

Уравнения (17) системы несвободных материальных точек можно представить также в виде уравнений (12), подразделяя все силы, приложенные к точкам системы, в том числе и реакции связей, на силы внешние и внутренние. Предполагая справедливым для внутренних сил III закон Ньютона, когда выполняются условия (14), с помощью уравнений (12) легко получить уравнения

$$d\mathbf{Q}/dt = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{Q} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_c, \quad M = \sum_i m_i, \tag{20}$$

$$d\mathbf{G}/dt = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{G} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i, \tag{21}$$

$$dT = \sum_i (\mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij}) \cdot d\mathbf{r}_i, \quad T = {}^1/_2 \sum_i m_i v_i^2, \tag{22}$$

выражающие соответственно общие теоремы о количестве движения, моменте количеств движения относительно некоторой неподвижной точки O, принимаемой за начало радиус-векторов $\mathbf{r}_i$, и о кинетической энергии. Обратим внимание, что в уравнениях (20) и (21) фигурируют лишь внешние силы, а в уравнении (22) и внешние, и внутренние (последних не будет в случае системы, представляющей собою одно абсолютно твердое тело).

Некоторые авторы [14] на основе теоремы (20) о движении центра масс пишут, что внутренние силы никакого влияния на движение центра масс системы не оказывают. Это верно лишь в случае $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$, но, вообще говоря, неверно в случае $\sum_i \mathbf{F}_i \neq 0$, так как внутренние силы, не входя в уравнение (20), могут, однако, оказывать косвенное влияние на движение центра масс посредством влияния на внешние силы $\mathbf{F}_i$ [11].

Следует отметить, что при решении ряда задач о движении неизменяемой системы, образованной материальными точками, соединенными твердыми «безмассовыми» телами, некоторые авторы описывают действия связей на точки силами взаимодействия между материальными точками. Такой чисто математический подход, основанный на уравнениях вида (12) и условиях (14) без учета физических свойств связей, обеспечивающих твердость системы, может приводить к серьезным трудностям и противоречиям, что видно из приводимых ниже примеров. Однако прежде чем о них говорить, остановимся кратко на вопросе о реакциях связей, осуществляемых «безмассовыми» телами, имея в виду концепцию Ньютона о материальности тела как источника силы, действующей на другое тело. В действительности все материальные тела обладают массами, не равными нулю, так что случай $m = 0$ следует рассматривать как идеализацию, т. е. как предельный случай $m \to 0$, могущий иметь место, когда масса данного тела столь мала по сравнению с массами других тел, что ею можно пренебречь. Для допустимости такого предельного перехода должны выполняться условия равновесия сил, приложенных к телу без массы [15].

Пусть, например, связь осуществляется некоторым твердым телом, обладающим массой m и центральным тензором инерции Θ, находящимся под действием заданных сил $\mathbf{F}_i$ и воздействующим на точки системы реакциями $\mathbf{R}_i$. По принципу освобождаемости уравнения движения тела имеют вид

$$m\,d\mathbf{v}_c/dt = \sum_i \mathbf{F}_i - \sum_i \mathbf{R}_i, \qquad d\mathbf{G}/dt = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i - \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_i.$$

В пределе $m \to 0$ отсюда получаем условия

$$\sum_i \mathbf{R}_i = \sum_i \mathbf{F}_i, \qquad \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \tag{23}$$

(корректности пренебрежения массой тела).

Иными словами, «безмассовое» тело, осуществляющее связь, можно рассматривать как воздействующее на тела системы некоторыми реакциями $\mathbf{R}_i \neq 0$, если последние таковы, что их главный вектор и главный момент равны соответственно главному вектору и главному моменту заданных сил, приложенных к этому телу. При выполнении условий (23) предел (при $m_\nu \to 0$) решения задачи с учетом масс всех входящих в систему тел будет представлять собою решение задачи для случая, когда массы одного или нескольких тел положены равными нулю уже при постановке задачи.

Пример 1. В книге [16, с. 74] приведен пример твердого тела, образованного тремя точками X_1, X_2, X_3 с одинаковыми массами m, расположенными на безмассовой прямой. На точки действуют заданные силы $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_3 = k\mathbf{e}_2$, $\mathbf{F}_2 = -2k\mathbf{e}_2$ $(k > 0)$. Найти движение, если в начальный момент точки покоятся на оси Oe_1, причем $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 = l\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$.

Уравнения движения запишем в виде уравнений (12)

$$m\ddot{\mathbf{r}}_1 = k\mathbf{e}_2 + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13}, \quad m\ddot{\mathbf{r}}_2 = -2k\mathbf{e}_2 + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23}, \quad m\ddot{\mathbf{r}}_3 = k\mathbf{e}_2 + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}.$$

Из теорем (20) и (21) при данных начальных условиях следует, что во все время движения $\mathbf{v}_c = \mathbf{G} = 0$, т. е. система покоится и должны выполняться уравнения равновесия

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} = -k\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} = 2k\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} = -k\mathbf{e}_2.$$

Согласно III закону внутренние силы $\mathbf{F}_{ij}$ должны быть типа $\mathbf{F}_{ij} = \lambda_{ij}\mathbf{e}_1$. Такие силы не удовлетворяют, очевидно, уравнениям равновесия.

На основании этого примера авторы [16] приходят к заключению, что для построения механической теории системы N точек, не противоречащей условию неизменяемости системы, нельзя сохранить оба равенства (14), а вместо них предлагают в качестве аксиомы принять равенства

$$\sum_{ij} \mathbf{F}_{ij} = 0, \quad \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \gamma \neq 0$$

и говорить, что на систему действует пара γ внутренних сил, определение которой, по их мнению, возможно «с помощью многих экспериментов, повторяемых в данных физических условиях» [16].

В действительности же эта задача легко решается, если рассматривать не внутренние силы $\mathbf{F}_{ij}$ взаимодействия между точками, которые, очевидно, осуществляют взаимодействие посредством твердой прямой, на которой они находятся, а силы реакций $\mathbf{R}_i$ последней на точки. Уравнения движения

$$m\ddot{\mathbf{r}}_1 = k\mathbf{e}_2 + \mathbf{R}_1, \quad m\ddot{\mathbf{r}}_2 = -2k\mathbf{e}_2 + \mathbf{R}_2, \quad m\ddot{\mathbf{r}}_3 = k\mathbf{e}_2 + \mathbf{R}_3$$

при заданных начальных условиях дают также равновесие системы, причем

$$\mathbf{R}_1 = -k\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{R}_2 = 2k\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{R}_3 = -k\mathbf{e}_2$$

и, как легко видеть, условия (23) выполняются тождественно.

Пример 2. В статье [17] рассматривается задача о движении твердого двойного маятника, состоящего из системы трех частиц P_s с массами m_s $(s = 0, 1, 2)$, соединенных посредством одного безмассового стержня. Стержень подвешен в точке O так, что система может двигаться как маятник в вертикальной плоскости, причем частица P_0 остается неподвижной. Внешними силами являются веса $m_s\mathbf{g}$ частиц и реакция $\mathbf{F}_0$ в точке O. Требуется найти угол отклонения θ стержня от вертикали как функцию времени.

Вводя в рассмотрение внутренние силы $\mathbf{F}_{ij}$ между частицами, набором которых, по мнению автора, в идеальном случае описывается действие связей на материальные точки, он с помощью законов II—IV и учета геометрических связей записывает уравнения движения, из которых находит выражения для $\mathbf{F}_0$ и $\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}_{10} + \mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{20}$:

$$\mathbf{F}_0 = -\Big(\sum_{i=1}^{2} m_i a_i \dot\theta^2 + \sum_{s=0}^{2} m_s g\cos\theta\Big)\mathbf{e}_r + \Big(\sum_{i=1}^{2} m_i a_i \ddot\theta + \sum_{s=0}^{2} m_s g\sin\theta\Big)\mathbf{e}_\theta,$$

$$\mathbf{R}_i = -m_i(a_i\dot\theta^2 + g\cos\theta)\,\mathbf{e}_r + m_i(a_i\ddot\theta + g\sin\theta)\,\mathbf{e}_\theta \quad (i = 1, 2).$$

Так как $a_1 \neq a_2$, то $\mathbf{e}_\theta$ — составляющие сил $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ не могут обращаться в нуль одновременно, т. е. внутренние силы $\mathbf{R}_i$ не являются центральными (не направлены по прямой, соединяющей точки) и теорема о моменте количеств движения места не имеет. На этом основании автор [17] делает вывод, что рассматриваемая «задача не имеет решения в традиционных рамках ньютоновской динамики». В связи с этим вместо допущения о центральности внутренних сил автор постулирует независимый закон изменения момента импульса и получает уравнение колебаний маятника

$$\ddot\theta = -\frac{m_1a_1 + m_2a_2}{m_1a_1^2 + m_2a_2^2}\,g\sin\theta. \tag{25}$$

Отметим, что выражения (24) для $\mathbf{R}_i$ не зависят от m_0, ввиду чего можно считать, что частицы P_0 вообще нет (именно в такой постановке дается решение этой задачи с помощью принципа Д'Аламбера в [13, гл. II]), да и сам автор [17] в примечании 4 пишет, что «P_0 включена только для подтверждения идеи Ньютона о том, что силы действуют на массы» (на самом деле для этого достаточно наличия неподвижной материальной точки O, а не P_0). Но если считать $m_0 = 0$, то $\mathbf{F}_{10} = \mathbf{F}_{20} = 0$, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{F}_{12}$, и из формул (24) видно, что $\mathbf{R}_1 \neq -\mathbf{R}_2$, т. е. $\mathbf{F}_{12} \neq -\mathbf{F}_{21}$! Это противоречие свидетельствует об ошибочности решения [17].

Рассмотрим эту же задачу с помощью уравнений (17), вводя вместо внутренних сил $\mathbf{F}_{ij}$ взаимодействия между частицами P_i $(i = 0, 1, 2)$ реакции $\mathbf{R}$ со стороны стержня на частицы и считая стержень обладающим массой m_3. Уравнения движения каждого из тел системы суть

$$m_s\ddot{\mathbf{r}}_s = m_s\mathbf{g} + \mathbf{R}_s \quad (s = 0, 1, 2), \quad m_3\ddot{\mathbf{r}}_3 = m_3\mathbf{g} - \sum_{s=0}^{2}\mathbf{R}_s + \mathbf{F}_0, \tag{26}$$

$$J_3\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{m_3a_2}{2}\,g\sin\theta - \sum_{i=1}^{2}\mathbf{r}_i\times\mathbf{R}_i,$$

где $\mathbf{r}_3$ — радиус-вектор центра тяжести стержня; $l = a_2/2$ — расстояние от O до его центра тяжести; J_3 — момент инерции стержня относительно точки O. Учитывая, что $\mathbf{r}_0 = 0$, $\mathbf{r}_i = a_i\mathbf{e}_r$ $(i = 1, 2)$, $\mathbf{r}_3 = l\mathbf{e}_r$, находим из всех этих уравнений, кроме последнего, выражения (24) для $\mathbf{R}_i$ $(i = 1, 2)$ в

$$\mathbf{F}_0 = -\sum_{i=1}^{2} m_i\,[(a_i\dot\theta^2 + g\cos\theta)\,\mathbf{e}_r - (a_i\ddot\theta + g\sin\theta)\,\mathbf{e}_\theta] - $$
$$- m_0 g\,(\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta) - m_3\,[(l\dot\theta^2 + g\cos\theta)\,\mathbf{e}_r - $$
$$- (l\ddot\theta + g\sin\theta)\,\mathbf{e}], \quad \mathbf{R}_0 = -m_0\mathbf{g}$$

и, подставляя в последнее из уравнений (26) выражения (24) для $\mathbf{R}_i$, получаем уравнение движения маятника

$$\ddot\theta = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{2} m_i a_i + m_3 l}{\sum\limits_{i=1}^{2} m_i a_i^2 + J_3}\, g\sin\theta.$$

При $m_3 = J_3 = 0$ это уравнение принимает вид уравнения (25) и выражение для $\mathbf{F}_0$ — вид (24). Легко проверить, что условия (23) при это выполняются. Очевидно, что если еще положить $m_0 = 0$, то выражения (24) для $\mathbf{R}_i$ не изменятся, а в выражении для $\mathbf{F}_0$ исчезнут члены с m_0, что свидетельствует о том, что наличие частицы P_0 сказывается только на реакции неподвижной точки 0. Следовательно, уравнения (14) из [17] справедливы лишь в случае, когда символы $\mathbf{R}_i$ $(i = 1, 2)$ в этих уравнениях обозначают реакции стержня на частицы P_i, а не равнодействующие сил взаимодействия между этими частицами. Это и понятно, так как частицы взаимодействуют между собой лишь посредством стержня, с которым они жестко связаны: частица P_1, движущаяся по дуге меньшего радиуса a_1, ускоряет движение частицы P_2, а сама задерживается более медленным движением этой второй [13].

Эти примеры показывают неправильность, вообще говоря, замены связей только внутренними силами взаимодействия между материальными точками, стесненными связями, и учета уравнений связи — необходимо учитывать также физические свойства связей. В случае связей, осуществляемых твердыми телами, надо иметь в виду, что данная материальная точка, жестко скрепленная с телом, испытывает воздействие молекулярных сил со стороны других точек тела, вследствие чего направление реакции априори неизвестно.

Законы Ньютона и принцип освобождаемости или принцип Д'Аламбера представляют собою фундамент так называемой векторной механики, задача которой состоит в выявлении всех сил, действующих на каждую материальную точку системы, и в последующем исследовании движения точек системы.

Основу другого направления классической механики — аналитической механики — составляют вариационные принципы, из которых как логические следствия вытекают все уравнения движения и теоремы механики [18].

Первоначально возникнув на основе законов Ньютона и принципа освобождаемости, вариационные принципы механики вышли в последующем далеко за рамки ньютоновой механики.

В заключение подчеркнем, что выводы классической механики, основанной на законах Ньютона, прекрасно подтверждаются практикой и служат основой научно-технического прогресса во многих областях техники.

Законы Ньютона выдержали проверку временем. Из всех испытаний классическая механика неизменно выходила с честью, в том числе и при коренной ломке наших представлений о пространстве и времени, при создании релятивистской механики, которая, как оказалось, содержит классическую механику как первое приближение, когда скорость v движения тел мала по сравнению со скоростью света. В связи с этим А. Эйнштейн подчеркивал: «Пусть никто не думает, что великое создание Ньютона может быть ниспровергнуто теорией относительности или какой-либо другой теорией. Ясные и широкие идеи Ньютона навечно сохранят свое значение фундамента, на котором построены наши современные физические представления» [19].

Литература

1. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии / Пер. с лат. А. Н. Крылова // Собр. тр. акад. А. Н. Крылова. М.: Изд-во АН СССР. 1936. Т. 7. 696 с.
2. *Лагранж Ж. Л.* Аналитическая механика / Пер. с фр.; Под ред. Л. Г. Лойцянского, А. И. Лурье. М.: Гостехтеориздат, 1950. Т. 1. 594 с.; Т. 2. 440 с.
3. *Вавилов С. И.* Исаак Ньютон. М.: Изд-во АН СССР. 1943.
4. *Эйлер Л.* Основы динамики точки. М.: ОНТИ, 1938.
5. *Thomson W., Tait P. G.* Treatise on natural philosophy. Cambridge, 1879. Vol. 1; 1883. Vol. 2.
6. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика / Пер. с англ. К. А. Лурье. М.: Наука, 1971. 635 с.
7. *Киттель Ч., Найт В., Рудерман М.* Берклеевский курс физики: Механика / Пер. с англ. под ред. А. И. Шальникова, А. С. Ахматова. М.: Наука, 1983. Т. 1. 479 с.
8. *Д'Аламбер Ж.* Динамика. М.: Гостехтеориздат, 1950. 344 с.
9. *Ляпунов А. М.* Лекции по теоретической механике. Киев: Наук. думка, 1982. 632 с.
10. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.: Гостехтеориздат, 1944. 655 с.
11. *Геронимус Я. Л.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1973.
12. *Чаплыгин С. А.* Собрание сочинений. М.: Гостехтеориздат, 1949. Т. 4.
13. *Раус Э. Дж.* Динамика системы твердых тел. М.: Наука, 1985. Т. 1.
14. *Голдштейн Г.* Классическая механика. М.: Гостехтеориздат, 1957.
15. *Аппель П.* Теоретическая механика / Пер. с фр. И. Г. Малкина. М.: Физматгиз, 1960. Т. 1. 515 с.; Т. 2. 487 с.
16. *Peiffer K., Rouche N.* Mécanique générale. Luvain-La-Neuve; Cabay, 1984. Pt 1, 2.
17. *Stadler W.* Inadequacy of the usual Newtonian formulation for certain problems in particle mechanics // Amer. J. Phys. 1982. Vol. 50, N 7.— Рус. пер. // Физика за рубежом: Преподавание. М.: Мир, 1984. С. 7—15.
18. *Румянцев В. В.* Об основных законах и вариационных принципах классической механики: Препр. Ин-та проблем механики АН СССР, ВЦ АН СССР № 257. М., 1985.
19. *Эйнштейн А.* Физика и реальность. М.: Наука, 1965.