

---

# ВИБРАЦИИ В ТЕХНИКЕ

---

СПРАВОЧНИК  
В 6 ТОМАХ

---

Редакционный совет

Председатель — В. Н. Челомей (главный редактор издания)  
Члены: В. С. Авдуевский, И. И. Артоболевский, И. И. Блехман,  
А. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов, В. В. Бойцов, В. В. Болотин,  
Н. В. Бутенин, И. И. Быховский, Р. Ф. Ганиев, М. Д. Генкин,  
Э. И. Григолюк (зам. председателя и главного редактора),  
Ф. М. Диментберг, А. Е. Кобринский, К. С. Колесников,  
М. З. Коловский, Э. Э. Лавендел, А. И. Лурье, Ю. А. Митропольский,  
Я. Г. Пановко, К. М. Рагульскис, В. В. Румянцев, Л. И. Седов,  
С. В. Серенсеи, К. В. Фролов (зам. главного редактора)

Москва «Машиностроение» 1979



---

# КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

---

ТОМ  
2

Под редакцией д-ра физ.-мат. наук  
**И. И. БЛЕХМАНА**

Москва «Машиностроение» 1979



B41  
ББК 34.41  
УДК 62:534(031)

Авторы:

И. И. Блехман, Н. В. Бутенин, Р. Ф. Ганиев, В. И. Горюнов, А. А. Кобринский, А. Е. Кобринский, М. З. Коловский, В. С. Метрикин, Ю. А. Митропольский, Б. И. Мосеенков, Р. Ф. Нагаев, Ю. И. Неймарк, Я. Г. Пановко, А. М. Плотников, В. Н. Рубановский, В. В. Румянцев, А. М. Самойленко, С. Я. Степанов, К. В. Фролов, К. Ш. Ходжаев

**Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. /Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). — М.: Машиностроение, 1979 — Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И. И. Блехмана. 1979. 351 с., ил.**  
В пер.: 1 р. 80 к

На обороте тит. л. авт.: И. И. Блехман, Н. В. Бутенин, Р. Ф. Ганиев и др.  
Во втором томе даны общие сведения о нелинейных механических колебательных системах, их классификация, приведены основы теории устойчивости. Изложены математические методы анализа и рассмотрены основные модели нелинейных колебательных систем. Приведены результаты, относящиеся к специальным современным проблемам теории нелинейных колебаний.  
Справочник предназначен для инженерно-технических работников, занятых проектированием, изготовлением и эксплуатацией современной техники.

В 31301-603 подписное 2702000000 ББК 34.41  
038(01)-79 6П5.1

© Издательство «Машиностроение», 1979 г.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

---

Предисловие . . . . .	9
-----------------------	---

### ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

#### ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ; МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИХ АНАЛИЗА

Г л а в а I. Общие сведения о нелинейных механических системах (Я. Г. Паношко, А. М. Плотников) . . . . .	11
1. Природа нелинейных сил и их характеристики . . . . .	11
2. Типы нелинейных механических систем, их фазовые диаграммы и особенности нелинейных колебаний . . . . .	20
3. Понятия об устойчивости, грубости, чувствительности . . . . .	32
Список литературы . . . . .	41
Г л а в а II. Математические методы анализа нелинейных колебательных систем (параграфы 1, 2, 4, 9—15 — Ю. А. Митропольский, Б. И. Мосеев, А. М. Самойленко; параграфы 3, 6—8 — И. И. Блехман; параграф 5 — Ю. И. Неймарк) . . . . .	42
1. Случай точной интегрируемости дифференциальных уравнений движения и приводимые к ним . . . . .	42
2. Графоаналитические методы . . . . .	47
3. Метод малого параметра . . . . .	51
4. Асимптотические методы . . . . .	65
5. Метод точечных отображений . . . . .	91
6. Метод гармонического баланса . . . . .	97
7. Стробоскопический метод . . . . .	101
8. Метод прямой линеаризации . . . . .	103
9. Частотные методы . . . . .	103
10. Качественные методы . . . . .	106
11. Методы, основанные на сведении к интегральным уравнениям . . . . .	113
12. Прямые вариационные методы . . . . .	115
13. Численные методы, использование ЭЦВМ . . . . .	120
14. Использование АВМ. Численно-аналитические методы . . . . .	126
15. Методы исследования нелинейных систем при случайных воздействиях . . . . .	129
Список литературы . . . . .	139



## ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ,  
ИХ АНАЛИЗ И СВОЙСТВА

<b>Г л а в а III. Консервативные системы (Р. Ф. Нагаев) . . . . .</b>	<b>141</b>
1. Общие сведения . . . . .	141
2. Консервативные системы с одной степенью свободы . . . . .	141
3. Классификация систем с одной степенью свободы . . . . .	143
4. Примеры систем с одной степенью свободы . . . . .	144
5. Консервативные системы с несколькими степенями свободы . . . . .	147
Список литературы . . . . .	149
<b>Г л а в а IV. Диссипативные системы (Я. Г. Пановко) . . . . .</b>	<b>150</b>
1. Общие сведения . . . . .	150
2. Определение огибающей (некоторые точные решения) . . . . .	151
3. Определение огибающей (приближенное решение) . . . . .	152
4. Определение параметров характеристики сопротивления по огибающей экспериментальной виброграммы . . . . .	153
5. Затухающие колебания при действии сил смешанного типа . . . . .	155
Список литературы . . . . .	155
<b>Г л а в а V. Системы с внешним возбуждением (М. Э. Коловский) . . . . .</b>	<b>156</b>
1. Основные понятия и определения . . . . .	156
2. Вынужденные колебания в системах с одной степенью свободы . . . . .	156
3. Вынужденные колебания в системах с несколькими степенями свободы . . . . .	165
4. Параметрические колебания в системах с одной степенью свободы . . . . .	168
Список литературы . . . . .	170
<b>Г л а в а VI. Автоколебательные системы (Н. В. Бутенин, В. И. Горюнов, В. С. Метрикин) . . . . .</b>	<b>171</b>
1. Общие сведения . . . . .	171
2. Простейшая автоколебательная система . . . . .	171
3. Автоколебания маятника Фроуда . . . . .	172
4. Автоколебания типа шимми . . . . .	176
5. Автоколебания самолета с автопилотом . . . . .	181
6. Автоколебания в динамической системе с ударными взаимодействиями . . . . .	186
7. Разрывные автоколебания . . . . .	188
Список литературы . . . . .	190

## ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

<b>Г л а в а VII. Взаимодействие источника возбуждения с колебательной системой (К. В. Фролов, К. Ш. Ходжаев) . . . . .</b>	<b>191</b>
1. Общая характеристика задач о взаимодействии источника возбуждения с колебательной системой . . . . .	191
2. Взаимодействие источника возбуждения с линейной одномассной системой . . . . .	192
3. Взаимодействие источника возбуждения с нелинейными колебательными системами . . . . .	199
4. Раздельное формирование амплитуды и частоты колебаний в системах с двумя источниками энергии . . . . .	202



5. Специальная форма уравнений движения и представление решения задачи через гармонические коэффициенты влияния . . . . .	203
6. Взаимодействие колебательной системы с электромагнитом. Представление решения через коэффициенты влияния в случае неавтономной системы . . . . .	206
7. Полуэкспериментальный метод исследования взаимодействия колебательных систем с источником энергии . . . . .	209
8. Обобщенные вибрационные силы и коэффициент взаимодействия . . . . .	210
9. Краткий обзор исследований . . . . .	211
Список литературы . . . . .	213
<b>Г л а в а VIII. Синхронизация и захватывание (И. И. Блехман) . . . . .</b>	<b>214</b>
1. О явлениях синхронизации и захватывания . . . . .	214
2. Общая постановка задач и характеристика математического аппарата теории синхронизации динамических объектов. Основные определения . . . . .	215
3. Синхронизация некоторых классов динамических объектов . . . . .	219
4. Некоторые прикладные задачи о синхронизации механических объектов . . . . .	227
5. Захватывание и вибрационное поддержание вращения неуравновешенного ротора . . . . .	233
6. Тенденция к синхронизации в системах с интегральным критерием . . . . .	236
7. Некоторые основные закономерности синхронизации и захватывания . . . . .	237
8. Краткий библиографический обзор . . . . .	238
Список литературы . . . . .	239
<b>Г л а в а IX. Действие вибрации на нелинейные механические системы (механика медленных движений, виброперемещение, виброреология) (И. И. Блехман) . . . . .</b>	<b>240</b>
1. О некоторых явлениях, сопровождающих действие вибрации на нелинейные механические системы, и общем подходе к их исследованию . . . . .	240
2. Основное положение механики медленных движений при действии вибрации на нелинейные системы. Метод прямого разделения движений . . . . .	241
3. Способы определения вибрационных сил . . . . .	243
4. Действие вибрации на механизмы (маятники и роторы). Вибрационная связь . . . . .	244
5. Действие вибрации на системы с трением. Вибрационное перемещение . . . . .	253
6. О виброреологии . . . . .	259
7. Об эффективных (виброреологических) характеристиках тел . . . . .	260
Список литературы . . . . .	262
<b>Г л а в а X. Нелинейные колебания твердых тел в потенциальном поле сил (Р. Ф. Ганиев) . . . . .</b>	<b>263</b>
1. Общие сведения . . . . .	263
2. Постановка задачи. Нелинейные уравнения движения . . . . .	264
3. О методе исследования нелинейных резонансных колебаний. Пространственная неустойчивость движения твердых тел . . . . .	267
4. Периодические и почти-периодические режимы пространственных колебаний твердых тел . . . . .	272
5. Механика пространственных колебаний гироскопических систем . . . . .	275
6. Некоторые другие приложения теории пространственной неустойчивости и колебаний твердых тел . . . . .	277
Список литературы . . . . .	280



<b>Г л а в а XI. Колебания и устойчивость твердых тел с полостями, заполненными жидкостью (В. В. Румянцев, В. Н. Рубановский, С. Я. Степанов)</b>	<b>280</b>
1. Общие сведения	280
2. Уравнения движения твердого тела с полостями, содержащими жидкость	281
3. Простейшие случаи движения твердого тела с полостью, целиком заполненной жидкостью	284
4. Малые колебания идеальной жидкости в однородном поле сил тяжести	287
5. Методы определения собственных колебаний жидкости	290
6. Уравнения движения консервативной системы с жидкими звеньями	293
7. Движение твердого тела с полостями, целиком заполненными жидкостью большой вязкости	295
8. Устойчивость движения твердого тела с полостями, содержащими жидкость, по отношению к конечному числу переменных	298
9. Устойчивость установившихся движений твердых тел с полостями, содержащими жидкость	300
Список литературы	305
<b>Г л а в а XII. Виброударные системы (А. Е. Кобринский, А. А. Кобринский)</b>	<b>306</b>
1. Общие сведения	306
2. Элементы классификации ВУС	307
3. Одномасные ВУС	309
4. Устойчивость периодических движений одномасных ВУС	315
5. Двухмасные ВУС	316
6. Увод	321
7. Многомасные ВУС	322
8. Косой удар	324
9. Краткие библиографические сведения	330
Список литературы	330
<b>Г л а в а XIII. Колебания нелинейных электромеханических систем (К. Ш. Ходжаев)</b>	<b>331</b>
1. Общие сведения	331
2. Уравнения Лагранжа — Максвелла	332
3. Пример: уравнения электромагнита с притягиваемым якорем	337
4. О линеаризации уравнений электромеханических колебаний	338
5. Системы, подверженные действию постоянных ЭДС. Устойчивость механического равновесия	340
6. Колебания систем с прерывателем	341
7. Периодические колебания систем с малой электрической диссипацией. Интегральный критерий устойчивости	341
8. Колебания систем под действием электромагнита	343
9. Медленные механические движения в электромеханических системах	344
Список литературы	347
<b>Предметный указатель</b>	<b>348</b>



В табл. 2 представлены аналогичные результаты, полученные для случая, когда динамической моделью является твердое тело, содержащее вращающийся ротор. Ротор помещен внутри тела и может вращаться с постоянной угловой скоростью  $p$  вокруг вертикальной оси  $O_1z$  ( $O_1$  — центр масс тела), причем ось вращения  $O_1z$  совпадает с главной центральной осью инерции тела. Кроме того, тело крепится с помощью упругих пружин к основанию, которое может совершать угловые колебания вокруг неподвижной вертикальной оси по закону  $\varphi_n = q \sin \omega t$  (для всех случаев непосредственно возбуждаемая координата есть  $\varphi$ , ее частота равна  $\omega$ ).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965. 416 с.
2. Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О. О нелинейных колебаниях твердого тела, несущего вращающийся ротор. — «Известия АН СССР. Сер. Механика», 1965, № 5.
3. Ганиев Р. Ф. Резонансные явления при нелинейных колебаниях твердых тел. — «Прикладная механика», 1972, № 12, с. 45—70.
4. Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О. Колебания твердых тел. М., «Наука», 1976.
5. Ганиев Р. Ф., Лютый А. И. Об устойчивости гироскопа на вибрирующем основании в условиях резонансов. — «Прикладная механика», 1972, № 11, с. 43—50.
6. Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О. О нелинейных резонансах при пространственных колебаниях твердого тела. — «Известия АН СССР. Сер. Механика твердого тела», 1967, № 4, с. 32—39.
7. Ганиев Р. Ф., Лютый А. И. Об устойчивости гироскопа с синхронным приводом. — «Прикладная механика», 1976, № 1, с. 82—89.
8. Ганиев Р. Ф., Фролов К. В. Об одной типичной задаче виброамортизации в нелинейной постановке. — «Известия АН СССР. Сер. Машиностроение», 1965, № 4.
9. Ганиев Р. Ф., Фролов К. В. К задаче виброамортизации приборов и машин в нелинейной постановке. — В кн.: Колебания и устойчивость машин, приборов и элементов систем управления. М., Изд-во АН СССР, 1968. 222 с.
10. Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О. Нелинейные колебания твердого тела, несущего вращающийся ротор. — «Известия АН СССР. Сер. Машиноведение», 1968, № 3.
11. Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О. Нелинейные пространственные колебания искусственного спутника Земли относительно центра масс. — «Известия АН СССР. Сер. Механика твердого тела», 1968, № 3, с. 3—11.
12. Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О. О взаимосвязи поступательного и вращательного колебательных движений твердого тела в ньютоновском поле сил. — «Известия АН СССР. Сер. Механика твердого тела», 1971, № 4.
13. Кононенко В. О. О колебаниях твердого тела около центра масс. — «Известия АН СССР. Сер. ОТН, механика и машиностроение», 1963, № 4, с. 23—30.
14. Кононенко В. О. Пространственные нелинейные колебания твердых тел. — «Прикладная механика», 1969, № 2, с. 13—27.
15. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956. 491 с.

## Г л а в а X I

### КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ, ЗАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ

#### 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Влияние жидкости, частично или полностью заполняющей некоторые полости твердых тел, входящих в механическую систему, на устойчивость и колебания этой системы необходимо учитывать, когда масса жидкости составляет значительную часть массы всей системы.

Теория устойчивости и колебаний таких систем весьма сложна, и в ней имеется ряд не до конца разрешенных вопросов. В данной главе приведены постановка задачи, различные формы уравнений движения, их первые интегралы, рассмотрены простейшие случаи движения. Указаны вошедшие в инженерную практику алгоритмы расчета малых колебаний системы. Даны основные определения устойчивости движения систем твердых тел с полостями, частично или целиком заполненными жидкостью, соответствующие теоремы прямого метода Ляпунова, рассмотрены примеры.

В главе изложены только самые основные теоретические вопросы. Обширная библиография по теории движения тел с жидким наполнением имеется в работах [11—13, 35].



## 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ЖИДКОСТЬ

Уравнения движения свободного твердого тела, имеющего замкнутую полость произвольной формы, целиком или частично заполненную однородной несжимаемой идеальной или вязкой жидкостью плотности  $\rho$ . С телом жестко свяжем прямоугольную декартову систему координат  $Ox_1x_2x_3$ . Обозначим через  $\tau$  область пространства  $x_1x_2x_3$ , занятую жидкостью в данный момент времени, через  $S'$  — границу области  $\tau$ , а через  $\sigma$  — поверхность стенок полости. Если жидкость полностью заполняет полость, то  $S'$  совпадает с  $\sigma$ , при частичном наполнении поверхность  $S'$  состоит из свободной поверхности жидкости  $S$  и части  $\sigma_1$  поверхности  $\sigma$ , с которой жидкость соприкасается в данный момент времени, т. е.  $S' = S + \sigma_1$ ,  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ , где  $\sigma_2$  — часть поверхности  $\sigma$ , не соприкасающаяся в данный момент с жидкостью; остальная часть полости или заполнена воздухом, ограниченной поверхностью  $S + \sigma_2$ , давление которого  $p_0$  считаем постоянным, а его массой пренебрегаем, или представляет собой вакуум с давлением  $p_0 = 0$ . Замкнутую линию пересечения поверхностей  $S$  и  $\sigma$  обозначим через  $s$ .

Тело и жидкость в его полости можно рассматривать как одну механическую систему и изучать ее движение по отношению к инерциальной системе координат  $O'x'_1x'_2x'_3$ .

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_0^2 + M \mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{v} \cdot \rho \int_{\tau} \mathbf{u} d\tau + \boldsymbol{\omega} \cdot \rho \int_{\tau} (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) d\tau + \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} \mathbf{u}^2 d\tau, \quad (1)$$

где  $M = M_1 + M_2$ ;  $\mathbf{r}_c = M^{-1}(M_1 \mathbf{r}_{c1} + M_2 \mathbf{r}_{c2})$ ;  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^{(1)} + \boldsymbol{\theta}^{(2)}$ , здесь  $M$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ;  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\boldsymbol{\theta}^{(1)}$ ,  $\boldsymbol{\theta}^{(2)}$  и  $\mathbf{r}_c$ ,  $\mathbf{r}_{c1}$ ,  $\mathbf{r}_{c2}$  — соответственно массы, тензоры инерции для точки  $O$  и векторы-радиусы относительно точки  $O$  центров масс системы, тела и жидкости;  $\mathbf{v}_0$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{u}$  — векторы скорости точки  $O$ , угловой скорости тела и скорости частицы жидкости при ее движении по отношению к твердому телу;  $\mathbf{r}$  — вектор-радиус относительно точки  $O$  частицы жидкости с координатами  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ .

Векторы количества движения  $\mathbf{Q}$  и момента  $\mathbf{G}$  относительно точки  $O$  количества движения системы определяются формулами [13]

$$\mathbf{Q} = \sum_{\mathbf{v}} m_{\mathbf{v}} \mathbf{v}_{\mathbf{v}} = \text{grad}_{\mathbf{v}_0} T, \quad \mathbf{G} = \sum_{\mathbf{v}} \mathbf{r}_{\mathbf{v}} \times m_{\mathbf{v}} \mathbf{v}_{\mathbf{v}} = \text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T, \quad (2)$$

где  $m_{\mathbf{v}}$ ,  $\mathbf{r}_{\mathbf{v}}$ ,  $\mathbf{v}_{\mathbf{v}}$  — соответственно масса, вектор-радиус относительно точки  $O$  и скорость материальной точки  $P_{\mathbf{v}}$  системы; суммирование происходит по всем точкам  $P_{\mathbf{v}}$  системы.

Уравнения движения, записанные в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , имеют вид [13]

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q} = \mathbf{K}; \quad (3)$$

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{Q} = \mathbf{L}; \quad (4)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v}; \quad (5)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (6)$$

где  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{L}$  — соответственно главный вектор и главный момент относительно точки  $O$  всех приложенных к системе активных сил;  $\mathbf{F}$  — вектор массовой силы, отнесенной к единице массы жидкости;  $p$  — гидродинамическое давление;  $\nu = \mu/\rho$  — кинематический коэффициент вязкости;  $\mu$  — коэффициент вязкости (для идеальной



жидкости  $\mathbf{v} = \mathbf{u} = 0$ );  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{u}$  — вектор абсолютной скорости частицы жидкости.

К уравнениям (5), (6) следует добавить граничные условия

$$\mathbf{u} = 0 \text{ на } \sigma_1; \quad (7)$$

$$\mathbf{p}_n = - \left[ p_0 + \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] \mathbf{n} \text{ на } S; \quad (8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } f = 0 \text{ на } S; \quad (9)$$

$$\cos \vartheta = (\alpha_2 - \alpha_1) / \alpha \text{ на } s, \quad (10)$$

где  $\mathbf{n}$  — орт внешней нормали к поверхности  $S$ ;  $\mathbf{p}_n$  — вектор напряжения жидкости для площадок, касательных к поверхности  $S$ ;  $R_1$  и  $R_2$  — главные радиусы кривизны поверхности  $S$ , определяемой уравнением  $f(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ ,  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$  — коэффициенты поверхностного натяжения на границах жидкость — воздух, тело — жидкость и тело — воздух;  $\vartheta$  — краевой угол в точках контура  $s$ , равный углу между ортами  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  внешних нормалей к контуру  $s$  поверхностей  $S$  и  $\sigma_1$ , расположенными в касательных плоскостях к этим поверхностям.

В случае идеальной жидкости  $\mathbf{v} = 0$ , и граничные условия (7) и (8) заменяются условиями

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \sigma_1; \quad (11)$$

$$p = p_0 + \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \text{ на } S, \quad (12)$$

где  $u_n$  — проекция вектора относительной скорости жидкости на нормаль к поверхности  $\sigma_1$ .

Если поверхностным натяжением можно пренебречь, то  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$  будем полагать равными нулю; при этом условие (10) выпадает, а условия (8) и (12) принимают соответственно вид

$$\mathbf{p}_n = - p_0 \mathbf{n} \text{ на } S; \quad (13)$$

$$p = p_0 \text{ на } S. \quad (14)$$

Если жидкость целиком заполняет полость, то имеем лишь одно граничное условие (7) или (11). В этом случае за начало подвижных осей удобно принять центр инерции системы, тогда уравнения движения (3) и (4) принимают более простой вид

$$\begin{aligned} M \left( \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 \right) &= \mathbf{K}; \\ \frac{d\mathbf{G}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} &= \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (15)$$

Активные силы, действующие на систему, в общем случае могут зависеть не только от положений и скоростей точек системы и времени, но и от некоторых параметров. В этом случае к уравнениям движения надо добавить также кинематические уравнения для названных параметров и рассматривать совместно полученную полную систему уравнений.

Уравнения движения (3) — (6) представляют собой совместную систему обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Решения этой системы уравнений будут содержать произвольные функции и произвольные постоянные, которые определяются из граничных и начальных условий. Начальные условия состоят обычно в том, что задаются положение, скорости  $\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}$  твердого тела, форма свободной поверхности  $S$  и поле скоростей жидкости  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  в начальный момент  $t = t_0$ .

**Уравнения движения несвободного тела.** Уравнения движения твердого тела с жидкостью, стесненного голономными идеальными связями, можно представить также в форме уравнений Лагранжа.



Положение системы будем определять лагранжевыми координатами тела  $q_j$  ( $j = 1, \dots, n \leq 6$ ) и декартовыми координатами  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) частиц жидкости. Векторы  $\mathbf{v}_0$  и  $\boldsymbol{\omega}$  можно представить в виде линейных функций обобщенных скоростей  $\dot{q}_j$  с коэффициентами, зависящими от обобщенных координат  $q_j$ . Подставив эти выражения в формулу (1), получим

$$T = T_1(\dot{q}_j, q_j, t) + \rho \int_{\tau} T^0(\dot{q}_j, q_j, u_i, x_i, t) d\tau,$$

где  $T_1$  и  $T^0$  — кинетическая энергия тела и плотность кинетической энергии жидкости.

Обозначим через  $Q_j$  обобщенные силы, соответствующие координатам  $q_j$ ; тогда уравнения Лагранжа движения твердого тела с жидкостью в его полости запишутся в виде [13]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, \dots, n); \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^0}{\partial u_i} - \frac{\partial T^0}{\partial x_i} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (17)$$

К этим уравнениям следует добавить уравнение несжимаемости (6), а также граничные и начальные условия. Уравнения (17) лишь по форме отличаются от гидродинамических уравнений Навье — Стокса (5).

**Интегралы уравнений движения.** Предположим, что на твердое тело наложены голономные стационарные связи, а активные силы, приложенные к системе, являются потенциальными, не зависящими явно от времени. Потенциальную энергию системы можно представить в виде

$$\Pi = \Pi_1(q_j) + \rho \int_{\tau} \Pi_2(q_j, x_i) d\tau + \Pi_3,$$

$$\Pi_3 = \alpha S + \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2,$$

где  $\Pi_1$  — потенциальная энергия активных сил, приложенных к твердому телу;  $\Pi_2$  — потенциальная энергия действующих на жидкость массовых сил, отнесенная к единице массы жидкости;  $\Pi_3$  — потенциальная энергия сил поверхностного натяжения. Используя теорему о кинетической энергии системы, приходим к уравнению [13]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (T + \Pi) &= -\mu \int_{\tau} E d\tau; \\ E &= \sum_{(1, 2, 3)} \left[ 2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \geq 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где знак суммирования с символом (1, 2, 3) означает, что два других слагаемых получаются из написанного круговой перестановкой индексов 1, 2, 3. Равенство  $E = 0$  возможно лишь в случае движения жидкости как твердого тела.

Если жидкость идеальная  $\mu = 0$ , то из уравнения (18) получаем интеграл энергии

$$T + \Pi = h = \text{const}. \quad (19)$$

Из теоремы о моменте количества движения следует, что если наложенные связи допускают вращение твердого тела вокруг неподвижной оси, а активные силы не дают относительно нее момента, то проекция момента количества движения системы на эту ось остается постоянной. Принимая указанную ось за ось  $x'_3$  системы  $O'x'_1x'_2x'_3$ , а в качестве  $q_n$  — угол поворота тела вокруг оси  $x'_3$ , получаем интеграл площадей в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = G_{O'} \cdot i'_3 = k = \text{const}, \quad G_{O'} = G + r'_0 \times Q, \quad (20)$$

где  $G_{O'}$  — момент количества движения системы для точки  $O'$ ;  $i'_3$  — орт оси  $x'_3$ .



Рассмотрим систему координат  $O'y_1y_2x'_3$ , вращающуюся вокруг оси  $x'_3$  с некоторой угловой скоростью  $\omega$ . Обозначим через  $T_*$ ,  $G_*$  и  $w$  соответственно кинетическую энергию, момент количества движения относительно оси  $x'_3$  и скорость жидкости при движении системы относительно осей  $O'y_1y_2x'_3$ . Тогда интегралы (19) и (20) примут вид [13]

$$T_* + \omega G_* + \frac{1}{2} J \omega^2 + \Pi = h, \quad G_* + J \omega = k,$$

где  $J$  — момент инерции системы относительно оси  $x'_3$ . Угловая скорость  $\omega$  вращения осей координат  $O'y_1y_2x'_3$  может быть задана произвольно. При исследовании стационарных движений системы величину  $\omega$  условимся выбирать таким образом, чтобы в любой момент времени имело место равенство  $G_* = 0$  или, что то же,  $J \omega = k$ ; тогда интеграл энергии можно представить в виде

$$T_* + \frac{k^2}{2J} + \Pi = h. \quad (21)$$

**Уравнения стационарных движений.** Пусть связи допускают вращение тела вокруг оси  $x'_3$  и активные силы не дают момента относительно этой оси, тогда система может совершать равномерное вращение вокруг оси  $x'_3$  с угловой скоростью  $\omega_0$  как одно твердое тело. Такие движения называют *стационарными* или *установившимися*.

Рассмотрим измененную потенциальную энергию системы

$$W = \frac{k_0^2}{2J} + \Pi, \quad (22)$$

где  $k_0$  — значение постоянной площадей  $k$  при равномерном вращении системы. Выражение для  $W$  зависит от формы жидкости и тех координат тела  $q_1, \dots, q_{n-1}$ , от которых зависят  $J$  и  $\Pi$ .

Для установившегося движения системы  $W$  имеет экстремальное (стационарное) значение, для которого [13]

$$\delta W = 0. \quad (23)$$

Условие (23) приводит к уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = -\frac{1}{2} \omega_0^2 \frac{\partial J}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad (24)$$

для координат  $q_i^0$  твердого тела в установившемся движении системы, а также к уравнениям для давления в жидкости, из которых следует условие

$$2 \frac{\alpha}{\rho} H - \frac{1}{2} \omega_0^2 (x_1'^2 + x_2'^2) + \Pi_2(q_i^0, x_1', x_2', x_3') = c = \text{const} \quad \left[ H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] \quad (25)$$

для определения свободной поверхности жидкости  $S_0$  в этом движении при частичном заполнении полости; значение постоянной  $c$  определяется количеством жидкости в полости.

В случае, когда среди звеньев системы содержатся упругие тела, к уравнениям (3) — (6) или (16), (17) необходимо добавить соответствующие уравнения теории упругости для упругих звеньев системы, а также граничные и начальные условия. Тогда в интегралах энергии (19), (21) появятся добавочные члены, обусловленные упругой деформацией элементов системы. При этом соотношение (23) служит для определения стационарных движений [26].

### 3. ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЦЕЛИКОМ ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Рассмотрим идеальную однородную несжимаемую жидкость и предположим, что массовые силы потенциальные. Тогда при безвихревом движении жидкости ( $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$ ) в произвольной полости или однородном вихревом движении жидкости в эллипсоидальной полости система тело — жидкость оказывается динамически



эквивалентной механической системе с конечным числом степеней свободы. В обоих случаях указанные свойства движения жидкости сохраняются во всё время движения при любых перемещениях тела. В частности, движение жидкости будет потенциальным, если оно началось из состояния покоя, а в случае эллипсоидальной полости движение будет однородным вихревым, если оно началось из вращения жидкости как одного твердого тела.

В этих случаях задачи об устойчивости и колебаниях твердого тела с жидкостью естественно ставить как задачи об устойчивости по Ляпунову и колебаниях для систем с конечным числом степеней свободы. Постановка и решение задач устойчивости при безвихревом движении дана в работе [31], а при однородном вихревом движении — в работе [27].

**Безвихревое движение жидкости.** Потенциал скоростей абсолютного движения жидкости можно представить в виде [3, 13]

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{i=1}^3 [u_{0i}x_i + \omega_i \psi_i(x_1, x_2, x_3)] + \sum_{s=1}^{k-1} \kappa_s \vartheta_s(x_1, x_2, x_3), \quad (26)$$

где  $\kappa_s$  — заданные величины главных циркуляций жидкости в  $k$ -связной полости тела;  $\psi_i, \vartheta_s$  — гармонические функции в области  $\tau$ , удовлетворяющие на стенках полости граничным условиям \*

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_i}{dn} &= x_2 n_3 - x_3 n_2 \quad (i = 1, 2, 3); \\ \frac{d\vartheta_s}{dn} &= 0 \quad (s = 1, \dots, k-1), \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\mathbf{n}$  — орт внешней нормали к поверхности  $\sigma$  с составляющими  $n_1, n_2, n_3$  вдоль осей  $x_1, x_2, x_3$ . При мысленном введении перегородок  $\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(k-1)}$ , делающих полость односвязной, функция  $\vartheta_s$  убывает на единицу при переходе через  $s$ -ю перегородку  $\sigma^{(s)}$  в направлении  $s$ -го главного контура и изменяется непрерывно при переходе через все остальные перегородки. Если при  $t = t_0$  жидкость неподвижна, то все  $\kappa_s = 0$ . Функции  $\psi_i, \vartheta_s$  зависят только от геометрии полости и не зависят от движения твердого тела.

Кинетическая энергия жидкости

$$T_2 = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} \text{grad}^2 \Phi \, d\tau = \frac{1}{2} M_2 \mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{s,r=1}^{k-1} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta}^{*sr} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} a_{sr} \kappa_s \kappa_r,$$

где постоянный симметричный тензор  $\boldsymbol{\theta}^*$  определяется компонентами

$$\theta_{ij}^* = \frac{1}{2} \rho \int_{\sigma} \left( \psi_i \frac{d\psi_j}{dn} + \psi_j \frac{d\psi_i}{dn} \right) d\sigma \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

а постоянная

$$a_{rs} = \rho \int_{\sigma^{(r)}} \frac{d\vartheta_s}{dn} d\sigma^{(r)} \quad (r, s = 1, \dots, k-1)$$

представляет собой поток вектора  $\text{grad} \vartheta_s$  через  $r$ -ю перегородку  $\sigma^{(r)}$ .

Суммарный момент количеств движения тела и жидкости

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= (\boldsymbol{\theta}^{(1)} + \boldsymbol{\theta}^*) \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}, \\ \mathbf{R} &= \sum_{s=1}^{k-1} \kappa_s \rho \int_{\tau} \mathbf{r} \times \nabla \vartheta_s \, d\tau, \end{aligned}$$

\* Здесь и далее символ (1, 2, 3) указывает на то, что соотношения, подобные уравнению (27), дополняются равенствами, полученными циклической перестановкой индексов.



где  $\mathbf{R}$  — вектор, постоянный в системе координат  $Ox_1x_2x_3$  и не зависящий от расположения точки  $O$ , для которой он определяется.

Примем за начало осей координат  $Ox_1x_2x_3$  центр масс системы, а оси  $x_i$  направим по главным осям эллипсоида

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{\theta}^{(1)} + \mathbf{\theta}^*) \cdot \mathbf{r} = 1. \quad (28)$$

Уравнения движения вокруг центра масс в форме второго из уравнений (15) принимают вид [3]

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 + R_3 \omega_2 - R_2 \omega_3 = L_1; \quad (29)$$

$$J_i = \theta_{i1}^{(1)} + \theta_{i1}^* \quad (1, 2, 3).$$

Такой же вид имеют уравнения движения системы вокруг неподвижной точки.

Уравнения (29) можно рассматривать как уравнения движения некоторого тела с ротором, имеющим постоянный момент количества относительного движения  $\mathbf{R}$ . В случае  $\kappa_s = 0$  вектор  $\mathbf{R}$  отсутствует и уравнения (29) совпадают с уравнениями движения преобразованного твердого тела, получающегося из исходной системы заменой жидкости на эквивалентное твердое тело с такой же массой, тем же центром тяжести и с эллипсоидом инерции  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{\theta}^* \cdot \mathbf{r} = 1$  относительно точки  $O$ . Твердое тело с присоединенным к нему эквивалентным телом Н. Е. Жуковский назвал *преобразованным телом* [3].

**Однородное вихревое движение жидкости в эллипсоидальной полости.** Пусть полость имеет форму эллипсоида

$$(x_1 - x_{10})^2/a_1^2 + (x_2 - x_{20})^2/a_2^2 + (x_3 - x_{30})^2/a_3^2 = 1.$$

Однородное вихревое движение описывается формулами [13]

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \Omega_2 x_3 - \Omega_3 x_2 \quad (1, 2, 3);$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{(1, 2, 3)} [(a_2^2 - a_3^2) x_3 x_3 + 2a_3^2 x_{20} x_3 - 2a_2^2 x_{30} x_2] \frac{\omega_1 - \Omega_i}{a_2^2 + a_3^2}.$$

Функции  $\Omega_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) определяются из уравнений Гельмгольца вихревого движения жидкости [13]. Для рассматриваемого случая эти уравнения имеют вид

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = 2a_1^2 \left( \frac{\omega_3 \Omega_2}{a_1^2 + a_2^2} - \frac{\omega_2 \Omega_3}{a_2^2 + a_1^2} \right) - 2\Omega_2 \Omega_3 \frac{a_1^2 (a_1^2 - a_2^2)}{(a_1^2 + a_2^2) (a_2^2 + a_1^2)} \quad (1, 2, 3). \quad (30)$$

Проекция на оси  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) вектора  $\mathbf{G}^{(2)}$  момента количества движения жидкости

$$G_i^{(2)} = \theta_{i1} \omega_1 + J'_i \Omega_i \quad (1, 2, 3),$$

где

$$\theta_{11}^* = \frac{M_2}{5} \frac{(a_2^2 - a_3^2)^2}{a_2^2 + a_3^2} + M_2 (x_{20}^2 + x_{30}^2);$$

$$J'_1 = \frac{4}{5} \frac{M_2 a_2^2 a_3^2}{a_2^2 + a_3^2} \quad \left( M_2 = \frac{4}{3} \pi \rho a_1 a_2 a_3 \right).$$

Уравнения движения вокруг центра масс в форме второго из уравнений (15) принимают вид

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + J'_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 + J'_2 \omega_2 \Omega_3 - J'_3 \omega_3 \Omega_2 = L_1 \quad (1, 2, 3),$$

Их нужно рассматривать совместно с уравнениями (30),



#### 4. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ СИЛ ТЯЖЕСТИ

Исследование колебаний жидкости со свободной поверхностью в подвижном или неподвижном сосуде на основе нелинейных уравнений (3) — (10) представляет сложную задачу математической физики. Основная сложность, состоящая в том, что граничные условия (8), (9) задаются на неизвестной изменяющейся свободной поверхности жидкости, отсутствует в линейной теории, в которой граничные условия задаются на известной невозмущенной свободной поверхности жидкости. Математические методы линейной теории достаточно хорошо разработаны, согласуются с экспериментом и вошли в инженерную практику.

Однако некоторые экспериментальные факты невозможно объяснить в рамках линейной теории (например, зависимость частот колебаний от амплитуды, ограниченность амплитуды в резонансном режиме, возникновение своеобразного вращения свободной поверхности жидкости в некоторых диапазонах частот возмущающей силы и др. [11, 35]).

Существуют приближенные нелинейные методы, относящиеся к цилиндрическим полостям или близким к ним, когда уравнение свободной поверхности можно представить в явном виде  $z = \zeta(x, y, t)$  с неизменной областью определения [12, 15]. Эти методы можно обобщить на полости более сложной формы введением криволинейных координат [7]. Указанные методы имеют только качественное согласование с экспериментом и пока не нашли широкого применения в инженерной практике.

**Разложение скорости жидкости на составляющие.** При изучении малых колебаний идеальной жидкости можно ограничиться рассмотрением только потенциальных течений, так как в линейном приближении вихревые составляющие не влияют на свободные колебания и распределение давления в жидкости [13]. При таких предположениях скорость частиц жидкости можно представить в виде

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi + \mathbf{v}^*, \quad (31)$$

где  $\varphi$  — потенциал скоростей движения жидкости в неподвижном сосуде;  $\mathbf{v}^*$  — скорость жидкости, целиком заполняющей полость, получающуюся при введении жестко связанной с телом крышки, совпадающей с невозмущенной свободной поверхностью жидкости; скорость  $\mathbf{v}^*$  полностью определяется потенциалами Стокса—Жуковского (см. п. 3).

Возможны и другие способы разделения скорости жидкости на составляющие. В работе [11] для определения  $\mathbf{v}^*$  вводится «плавающая крышка», сохраняющая горизонтальное положение в любом отклоненном положении тела.

**Свободные колебания жидкости в неподвижном сосуде.** Рассмотрим подробнее вспомогательную краевую задачу для определения колебаний жидкости в неподвижном сосуде и методы ее решения. Для некоторых простых полостей эта задача решается методом разделения переменных Фурье. В общем случае ее можно решить на ЭВМ интегральным методом Рунге или другими методами с использованием аналитических решений для простейших полостей [1].

В линейном приближении значительно упрощаются граничные условия для жидкости; их можно задавать на известной невозмущенной свободной поверхности жидкости и смоченной поверхности полости. Согласно (5), (6), (9), (11) и (14) функция  $\varphi$  должна быть гармонической в области  $\tau$ , занятой жидкостью в положении равновесия, и должна удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } \sigma_1; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\zeta = 0 \quad \text{при } z = 0, \end{aligned} \quad (32)$$



где  $z = \zeta(x, y, t)$  — уравнение свободной поверхности жидкости в системе координат, жестко связанной с полостью так, что плоскость  $z = 0$  совпадает с невозмущенной свободной поверхностью жидкости  $S_0$  (рис. 1).

Исключая из последних двух условий в (32) функцию  $\zeta$ , получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ при } z=0 \quad (33)$$

После нахождения функции  $\varphi$  форма волны определяется выражением

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0}. \quad (34)$$

Введем оператор Неймана  $H$  [12, 13]

$$\varphi(Q) = Hf \equiv \int_{S_0} H(P, Q) f(P) dP,$$

который ставит в соответствие функции  $f(P)$  ( $P \in S_0, \int_{S_0} f dS = 0$ ) функцию  $\varphi(Q)$  ( $Q \in \tau$ ), гармоническую в области  $\tau$  и удовлетворяющую условиям  $d\varphi/dn = 0$ , если  $P \in \sigma_1$ , и  $\partial\varphi/\partial n = f$ , если  $P \in S_0$ . Здесь  $H(P, Q)$  — функция Грина задачи Неймана для области  $\tau$

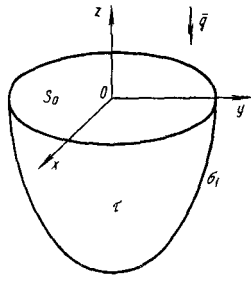


Рис. 1

Используя очевидное соотношение  $\varphi(Q) = H \frac{\partial \varphi}{\partial z} = H \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ , последнее условие в (32) представим в виде интегро-дифференциального уравнения для определения функции  $\zeta$

$$g\zeta + H \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0. \quad (35)$$

Свободными (или собственными, или главными) колебаниями жидкости называют такие потенциальные течения, потенциал скоростей которых имеет вид  $\varphi(Q, t) = \Phi(Q) \cos \kappa t$ . Число  $\kappa$  называют собственной частотой колебания.

На основании (34) форма поверхности волны свободного колебания определяется уравнением

$$\zeta = \psi(x, y) \sin \kappa t, \quad \psi = \frac{\kappa}{g} \Phi(x, y, 0). \quad (36)$$

Функция  $\Phi$  — гармоническая в области  $\tau$  и удовлетворяет граничным условиям

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } \sigma_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \lambda \Phi \text{ при } z=0 \quad (37)$$

$$\left( \lambda = \frac{\kappa^2}{g} \right).$$

При подстановке (36) в (35) получим уравнение для определения функции  $\psi$

$$\psi = \lambda H \psi. \quad (38)$$

Таким образом, функции  $\psi$ , определяющие форму свободной поверхности жидкости, являются собственными функциями линейного оператора  $H$ . На основании общих теорем функционального анализа легко установить следующие свойства этих функций [13]:

1) при движении жидкости около положения равновесия в сосуде ограниченных размеров существуют собственные колебания, т. е. решения вида  $\zeta_n = \psi_n(x, y) \sin \kappa_n t$ ;



2) собственные числа  $\kappa_n$  — положительные, имеют конечную кратность  $n$  и образуют неограниченно возрастающую последовательность  $\kappa_n \rightarrow \infty$ ;

3) собственные функции  $\psi_n$  оператора  $H$ , которые описывают главные формы свободных колебаний жидкости, таковы, что последовательность функций  $1, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$  полна и ортогональна;

4) собственные числа  $\kappa_n$  и собственные функции  $\psi_n$  могут быть определены методом Ритца.

Для установления характера движения жидкости рассмотрим простейший пример плоских колебаний (в плоскости  $Oyz$ ) жидкости в канале прямоугольного сечения (рис. 2). Частные решения ищем в виде  $\varphi(y, z, t) = f(t)Y(y)Z(z)$ . После разделения переменных в уравнении Лапласа  $\Delta\varphi = 0$  и учета граничных условий (32) получим

$$\begin{aligned}\varphi_n(y, z, t) &= c \cos \frac{n\pi}{l} y \operatorname{ch} \frac{n\pi}{l} (z+h)/l \cos \kappa_n t; \\ \kappa_n^2 &= \frac{n\pi g}{l} \operatorname{th} \frac{n\pi h}{l}; \quad \xi_n(y, z, t) = a \cos \frac{n\pi}{l} y \sin \kappa_n t; \\ a &= \frac{c\kappa_n}{g} \operatorname{ch} \frac{n\pi h}{l},\end{aligned}\quad (39)$$

где  $c$  — постоянная;  $n$  — любое натуральное число.

Таким образом, в прямоугольном канале могут возникать стоячие колебания жидкости, описываемые формулами (39). Таких форм колебаний бесчисленное множество, так как каждому натуральному числу соответствует своя форма колебаний. В каждом главном колебании при фиксированном  $y$  точка поверхности волны совершает периодические колебания с частотой  $\kappa_n$ . В узлах при  $y = \frac{2k-1}{2n} l$  ( $k = 1, \dots, n$ ) ам-

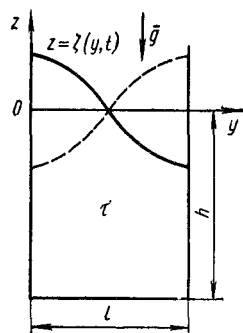


Рис. 2

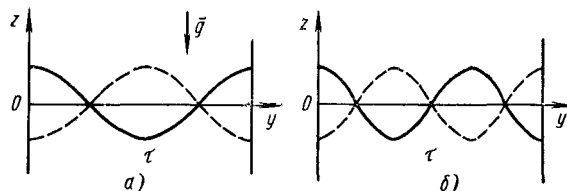


Рис. 3

плитуда равна нулю. При фиксированном  $t$  волна имеет форму косинусоиды. В моменты  $t_v = \frac{v\pi}{\kappa_n}$  ( $v = 0, 1, \dots$ ) свободная поверхность жидкости горизонтальна.

На рис. 2 изображена одноузловая форма главных колебаний, на рис. 3, а — двухузловая и на рис. 3, б — трехузловая.

Обратим внимание на зависимость частоты  $\kappa_n$  от параметра  $h/l$  (относительной глубины), которая приведена в таблице (через  $\kappa_n^2$  обозначена величина  $\kappa_n^2 \sqrt{l/\pi g}$ ).

В работе [12], откуда заимствована эта таблица, приведены также таблица собственных частот, их зависимости от параметров для ряда других форм полостей и обширная библиография.

Величина собственной частоты заметно изменяется с глубиной только для очень мелких полостей и только для первых собственных частот, когда длина волны не очень мала. Для сосудов более или менее значительной глубины и для частоты  $\kappa_n$  с достаточной степенью точности справедлива приближенная формула  $\kappa_n^2 \approx \pi g/l$ . Заметим, что для собственных частот колебаний жидкости в сосуде, глубина которого в 2 раза меньше ширины зеркала свободной поверхности, последняя формула дает погрешность не более 4%.



$h/l$	$\kappa_1^*$	$\kappa_2^*$	$\kappa_3^*$	$\kappa_4^*$	$\kappa_5^*$	$\kappa_6^*$
0,1	0,55	1,06	1,61	1,84	2,14	2,40
0,2	0,75	1,32	1,70			
0,5	0,96					
0,7	0,99	1,41	1,73	2,00	2,23	2,45
0,9						
1,0	1,00					

Уравнения движения частиц жидкости, лежащих на определенной глубине, можно получить дифференцированием потенциала скоростей по  $y$  и  $z$ .

$$\frac{dy}{dt} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=y_0, z=z_0} = a_1 \cos \kappa_n t;$$

$$\frac{dz}{dt} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{y=y_0, z=z_0} = a_2 \cos \kappa_n t,$$

где

$$a_1 = -c \frac{n\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} y_0 \operatorname{ch} n\pi (z_0 + h)/l;$$

$$a_2 = c \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi}{l} y_0 \operatorname{sh} n\pi (z_0 + h)/l.$$

Частицы жидкости совершают прямолинейные колебания около своего начального положения  $(y_0, z_0)$  с частотой  $\kappa_n$  и амплитудой  $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ . Амплитуды убывают с глубиной по экспоненциальному закону и тем быстрее, чем больше частоты колебаний. На рис. 4 отрезками прямых изображены траектории частиц, лежащих на глубине  $z = z_0$ . Частицы жидкости, лежащие на одной вертикали с узлами, движутся по горизонтальным прямым.

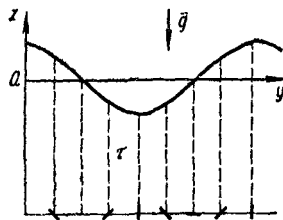


Рис. 4

Главные колебания можно разделить на два типа: *четные* и *нечетные*. Для первого типа колебаний свободная поверхность представляет собой волну, симметричную относительно прямой  $y = l/2$ . Это волны четных индексов. Они не смещают центр тяжести жидкости в горизонтальном направлении. Можно показать, что никакими горизонтальными перемещениями сосуда нельзя вызвать на поверхности жидкости, которая в нем налита, волн этого типа. В свою очередь, подобные волны,

возникшие вследствие каких-либо причин на поверхности жидкости, налитой в сосуд, не могут оказать никакого влияния на характер движения такого сосуда в горизонтальном направлении. Волны нечетных индексов смещают центр тяжести с вертикальной прямой, и связанное с ними движение жидкости влияет на движение сосуда.

##### 5. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ

Метод Фурье разделения переменных применяют главным образом для цилиндрических полостей произвольного профиля с вертикальной образующей и плоским горизонтальным дном ( $z = -h$ ). В этом случае потенциал скоростей ищут в виде

$$\varphi(x, y, z) = Z(z) \chi(x, y).$$

Подставляя это выражение в исходные дифференциальные уравнения и граничные



условия, после разделения переменных получим следующие краевые задачи для функций  $Z$  и  $\chi$ :

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \beta^2 Z = 0, \quad \left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z=-h} = 0; \quad \left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z=0} = \lambda Z(0); \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \beta^2 \chi = 0; \quad \frac{\partial \chi}{\partial n} \Big|_s = 0, \quad (41)$$

где  $s$  — контур профиля цилиндрической полости;  $\beta^2$  — постоянная.

Задача (41) имеет нетривиальные решения лишь для определенных значений  $\beta = \beta_n$  (собственных значений), при этом соответствующие собственные функции  $\chi_n$  ортогональны на  $S_0$ . Если контур  $s$  совпадает с одной из координатных линий какой-либо криволинейной изотермической системы координат, то в (41) переменные  $x$  и  $y$  также разделяются и задача о свободных колебаниях сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решение задачи (40) имеет вид

$$Z_n(z) = \frac{\text{ch}(\beta_n(z+h))}{\beta_n \text{sh}(\beta_n h)}, \quad \lambda_n = \beta_n \text{th}(\beta_n h),$$

если принять условие нормировки  $(dZ/dz)_{z=0} = 1$

Методом Фурье получены решения задачи о колебаниях жидкости в сосудах в форме параллелепипеда, кругового цилиндра, цилиндра с кольцевым дном, цилиндра с некоторым числом сплошных и несплошных перегородок и др. [11, 12].

**Метод Ритца.** Задача о свободных колебаниях жидкости в неподвижном сосуде может быть сведена к вариационной задаче  $\delta L = 0$  для функционала [12, 13]

$$L = \int_V (\nabla \Phi)^2 d\tau - \lambda \int_{S_0} \Phi^2 dS = \lambda \int_S (H\psi) \psi dS - \int_S \psi^2 dS, \quad \lambda = \kappa^2/g. \quad (42)$$

Для решения этой задачи используют метод Ритца, который в стандартном виде сводится к следующему: вводят полную ортонормированную систему «координатных» функций  $\{\chi_n\}$  и решение задачи ищут в виде отрезка ряда с постоянными коэффициентами

$$\Phi = \sum_{n=1}^N a_n \chi_n, \quad (43)$$

где  $a_n$  определяют из уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial a_n} = \sum_{m=1}^N a_m (\alpha_{nm} - \lambda \beta_{nm}) = 0 \quad (n=1, \dots, N); \quad (44)$$

$$\alpha_{nm} = \alpha_{mn} = \int_V \chi_n \nabla \chi_m d\tau; \quad \beta_{nm} = \beta_{mn} = \int_{S_0} \chi_n \chi_m dS.$$

Нетривиальные решения системы (44) существуют для значений  $\lambda$ , удовлетворяющих уравнению частот

$$|\alpha_{nm} - \lambda \beta_{nm}|_1^N = 0. \quad (45)$$

Так как матрицы  $\|\alpha_{nm}\|$  и  $\|\beta_{nm}\|$  симметричные, то корни  $\lambda_n$  ( $n=1, \dots, N$ ) уравнения (45) — действительные, при этом  $\kappa_n^2 = \lambda_n g$ . Решение уравнения (45) требует применения ЭВМ.

Основная трудность, с которой сталкиваются при практической реализации метода Ритца, состоит в выборе координатных функций. При этом следует иметь в виду следующее:

а) значение  $\lambda_1$ , соответствующее низшей частоте, «мало чувствительно» к выбору функций  $\chi_n$ ;



б) можно не требовать, чтобы функции  $\chi_n$  строго удовлетворяли всем граничным условиям; минимизирующая последовательность в этом случае также будет сходиться к точному решению.

Таким образом, систему координатных функций  $\{\chi_n\}$  можно выбирать довольно грубо. Достаточно только обеспечить полноту этой системы. В качестве функций  $\chi_n$  целесообразно выбирать собственные функции задачи о колебании жидкости в некотором сосуде, охватывающем заданный, но имеющий более простую форму. Например, если жидкость колеблется внутри конического бака, то в качестве координатных функций можно взять собственные функции задачи о колебании жидкости в цилиндрическом сосуде, поперечное сечение которого равно наибольшему из оснований конуса.

Для оценки собственных частот колебаний жидкости используют следующее свойство: если два сосуда имеют одинаковую площадь свободной поверхности и один сосуд объемлет другой, то соответствующие собственные частоты будут больше у того сосуда, объем которого больше [12].

**Приближенный способ расчета собственных колебаний.** Для определения собственных колебаний жидкости в области  $\tau$ , близкой к области  $\tau^*$ , для которой известна система собственных функций  $\Phi_n^*$  и собственных чисел  $\lambda_n^*$ , целесообразно применять метод теории возмущений [12, 13]. Этот метод позволяет для широкого класса полостей получить в явном виде приближенное решение с любой степенью точности.

Принимая в качестве координатных функций  $\chi_n$  функции  $\Phi_n^*$ , коэффициенты уравнений (44) представим в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{nm} &= \int_{\tau^*} \nabla \Phi_n^* \nabla \Phi_m^* d\tau + \int_{\Delta\tau} \nabla \Phi_n^* \nabla \Phi_m^* d\tau, \quad \Delta\tau = \tau - \tau^*; \\ \beta_{nm} &= \int_{S_0^*} \Phi_n^* \Phi_m^* dS + \int_{\Delta S_0} \Phi_n^* \Phi_m^* dS, \quad \Delta S_0 = S_0 - S^*. \end{aligned} \quad (46)$$

Принимая условие нормировки  $\int_{S_0^*} \Phi_n^{*2} dS = 1$ , получаем  $\int_{\tau^*} (\nabla \Phi_n^*)^2 d\tau = \lambda_n^*$ .

Так как области  $\Delta\tau$  и  $\Delta S_0$  малы, то формулы (46) можно преобразовать к виду

$$\alpha_{nm} = \lambda_n^* \delta_{nm} + \varepsilon \xi_{nm}; \quad \beta_{nm} = \delta_{nm} + \varepsilon \eta_{nm},$$

где  $\delta_{nm}$  — символ Кронекера ( $\delta_{nm} = 1$ , если  $n = m$ , и  $\delta_{nm} = 0$ , если  $n \neq m$ );  $\varepsilon$  — малый параметр.

Система уравнений (44) примет вид

$$\begin{aligned} a_i (\lambda_i^* - \lambda) &= \varepsilon A_i, \quad A_i = \sum_{k=1}^N (\lambda \eta_{ik} - \xi_{ik}) \\ (i &= 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (47)$$

Решение системы (47) разыскиваем в виде рядов

$$a_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \varepsilon^j, \quad \lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{(j)} \varepsilon^j. \quad (48)$$

Для корня  $\lambda_n$ , близкого к  $\lambda_n^*$ , получим

$$\begin{aligned} a_{i0} &= 0, \quad i \neq n, \quad \lambda^{(0)} = \lambda_n^*; \\ a_{i1} &= \frac{a_{n0} (\lambda_n^* \eta_{in} - \xi_{in})}{\lambda_i^* - \lambda_n^*}, \quad i \neq n, \quad \lambda^{(1)} = \lambda_n^* \eta_{nn} - \xi_{nn} \end{aligned}$$

и т. д.

Примеры, показывающие эффективность изложенного метода, приведены в монографии [12].



**Определение потенциалов Стокса — Жуковского.** Функции  $\psi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в формуле (26) можно определить теми же методами Фурье, Ритца и методом возмущений. При использовании метода Ритца минимизируют функционалы

$$F_1(\psi_1) = \int_{\tau} (\nabla \psi_1)^2 d\tau - 2 \int_{\sigma} \psi_1 h_1 dS,$$

$$h_1 = x_2 n_3 - x_3 n_2 \quad (1, 2, 3).$$

Отыскание функции  $\psi_i$  проводится с помощью метода Ритца в стандартном виде так, как показано в п. 5. Заметим, что в отличие от задачи определения свободных колебаний здесь получится неоднородная система уравнений.

## 6. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ С ЖИДКИМИ ЗВЕНЬЯМИ

Формулы (26), (27) и (31) можно обобщить на произвольные системы с  $n$  степенями свободы (без учета жидкости), среди звеньев которых имеется тело, содержащее идеальную жидкость. В этом случае скорость жидкости можно представить в виде

$$v = \nabla \varphi + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \nabla \varphi_i^*.$$

Тогда кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\nabla \varphi)^2 d\tau + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \rho \int_{\tau} \nabla \varphi \nabla \varphi_i^* d\tau, \quad (49)$$

где

$$m_{ij} = m_{ij}^0 + \rho \int_{\tau} \nabla \varphi_i^* \nabla \varphi_j^* d\tau;$$

$m_{ij}^0$  — матрица коэффициентов квадратичной формы, представляющей собой кинетическую энергию системы без жидкости,  $\rho \int_{\tau} \nabla \varphi_i^* \nabla \varphi_j^* d\tau$  — присоединенные массы жидкости.

С точностью до квадратичных членов потенциальная энергия системы [13]

$$\Pi = \Pi^{(0)} + \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)}, \quad \Pi^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} q_i q_j,$$

$$\Pi^{(1)} = \sum_{i=1}^n q_i \int_{S_0} f_i \zeta dS, \quad \Pi^{(2)} = \frac{1}{2} \rho g \int_{S_0} \zeta^2 dS,$$

где  $\Pi^{(0)}$  — потенциальная энергия системы, когда свободная поверхность жидкости заменена крышкой,  $\Pi^{(2)}$  — потенциальная энергия жидкости в неподвижном сосуде,  $f_i$  — функции, определяемые только геометрией полости.

На основании принципа Гамильтона уравнения движения системы можно получить, приравняв нулю вариацию функционала [13]

$$L = \int_0^t (T - \Pi) dt.$$

Для упрощения записи уравнений перейдем от переменных  $q_j$  к каноническим переменным  $Y_j$  с помощью известного линейного преобразования, одновременно



приводящего формы  $\Pi^{(0)}$  и  $T^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$  к диагональному виду

$$T^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n Y_j^2; \quad \Pi^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \mu_j^2 Y_j^2,$$

где  $\mu_j$  — собственные частоты системы в том случае, когда свободная поверхность жидкости накрыта крышкой.

В новых переменных получаем

$$\begin{aligned} T &= T^{(0)} + \sum_{j=1}^n Y_j \rho \int_{\tau} \nabla \Psi \nabla \varphi_j^{**} d\tau + \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\nabla \Psi)^2 d\tau; \\ \Pi &= \Pi^{(0)} + \sum_{j=1}^n Y_j \int_{S_0} v_j \zeta dS + \frac{1}{2} \rho g \int_{S_0} \zeta^2 dS, \end{aligned} \quad (50)$$

где  $\varphi_j^{**}$  и  $v_j$  — линейно выражаются через  $\varphi_j^*$  и  $f_j$ .

Исключая  $\Psi$ , используя формулу Грина и кинематическое соотношение, представим  $T$  в форме

$$T = T^{(0)} + \sum_{j=1}^n \dot{Y}_j \rho \int_{S_0} \varphi_j^{**} \zeta_t dS + \frac{1}{2} \rho \int_{S_0} (H \zeta_t) \zeta_t dS.$$

С помощью принципа Гамильтона получим уравнения колебаний системы в виде [13]

$$\begin{aligned} \ddot{Y}_j + \rho \int_{S_0} \varphi_j^{**} \zeta_{tt} dS + \mu_j^2 Y_j + \int_{S_0} v_j \zeta dS &= 0, \quad j=1, \dots, n; \\ \rho \sum_{j=1}^n \varphi_j^{**} \ddot{Y}_j + \rho H \zeta_{tt} + \sum_{j=1}^n v_j \dot{Y}_j + \rho g \zeta &= 0. \end{aligned} \quad (51)$$

В работе [13] рассмотрен ряд конкретных задач, решение которых сводится к изучению системы (51).

В прикладных задачах иногда целесообразно заменить систему интегро-дифференциальных уравнений (51) бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого достаточно положить в (51)

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) \chi_n(x, y),$$

где  $\{\chi_n\}$  — полная на  $S_0$  ортонормированная система функций. Если в качестве  $\{\chi_n\}$  выбрать систему собственных функций оператора  $H$ , то бесконечная система уравнений, соответствующая системе (51), примет вид [13]

$$\begin{aligned} \ddot{Y}_j + \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{r}_i A_{ji} + \mu_j^2 Y_j + \sum_{i=1}^{\infty} r_i B_{ji} &= 0, \quad j=1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^n A_{ik} \ddot{Y}_i + m_k \ddot{r}_k + \sum_{i=1}^n B_{ik} Y_i + \beta_k r_k &= 0, \quad k=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (52)$$



где

$$A_{ij} = \rho \int_{S_0} \varphi_i^* \chi_j dS; \quad B_{ij} = \int_{S_0} v_i \chi_j dS;$$

$$m_j = \rho g / \omega_j^2; \quad \beta_j = \rho g;$$

$\omega_j$  — собственные частоты колебания жидкости в сосуде.

Уравнения малых колебаний системы можно получить и относительно функции  $\varphi$ , исключая из (50)  $\zeta$  с помощью кинематического соотношения  $\varphi_z = \zeta_t$  после дифференцирования по  $t$  последнего условия в (32). Это приводит к искусственному повышению порядка системы. Д. Е. Охочимский [17] предложил вместо потенциала скоростей использовать потенциал смещений, определяемый равенством  $Q_t = \varphi$ . Тогда уравнения запишутся так:

$$\ddot{Y}_j + \rho \int_{S_0} \varphi_j^{**} Q_{tt} dS + \mu_j^2 Y_j + \int_{S_0} v_j Q_z dS = 0, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$\rho \sum_{i=1}^n \varphi_i^{**} \ddot{Y}_i + \rho Q_{tt} + \sum_{i=1}^n v_i Y_i + \rho g Q_z = 0.$$

Эти уравнения также могут быть сведены к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, если функцию  $Q$  разложить в ряд Фурье.

При введении «плавающей крышки» аналогичная система уравнений приведена в работе [9], где указаны также значения коэффициентов уравнений для некоторых форм полостей.

Из общих теорем функционального анализа вытекают следующие свойства рассматриваемой задачи [6, 13].

Если консервативная система состоит из конечного числа звеньев и содержит конечное число полостей, частично заполненных идеальной жидкостью, и если в положении равновесия системы потенциальная энергия системы имеет минимум, то при движении этой системы около положения равновесия существуют главные колебания

$$Y_j = X_j e^{i\kappa_n t}; \quad \zeta = z e^{i\kappa_n t},$$

а частоты этих колебаний являются действительными числами и  $\kappa_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Это означает, что положение равновесия устойчиво; система главных колебаний полна, и любое свободное движение системы можно представить как суперпозицию главных колебаний; главные колебания и частоты могут быть найдены методом Рунта.

Здесь считается, что положение равновесия устойчиво, если любое главное колебание ограничено. Таким образом, утверждения, что система главных колебаний полна и любое свободное движение системы можно представить как суперпозицию главных колебаний, являются аналогом теоремы Лагранжа. Если же в положении равновесия системы потенциальная энергия не есть минимум, то среди чисел  $\kappa_n^2$  есть по крайней мере одно отрицательное или равное нулю [6].

## 7. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЯМИ, ЦЕЛИКОМ ЗАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ БОЛЬШОЙ ВЯЗКОСТИ

Алгоритм построения асимптотического разложения решения. Рассмотрим задачу о движении твердого тела с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, относительно центра масс в потенциальном поле сил.

Движение системы описывается уравнениями (5), (6), (15) с граничным (7) и начальными условиями, которые представим в виде (принимая за единицы длины и



времени характерные линейный размер области  $\tau$  и время в движении тела относительно центра масс)

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \right] - \Delta \mathbf{u} + \nabla q = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \\ \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \frac{d\mathbf{G}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}] - \mathbf{L} = 0; \\ \mathbf{G} = \rho \int_{\tau} (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) d\tau; \quad q = \frac{1}{v} \left[ \frac{p}{\rho} + U_2 - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 \right]; \\ \mathbf{u}|_{\sigma} = 0; \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{r}); \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}^0. \end{aligned} \quad (53)$$

Эти уравнения будем рассматривать в предположении, что вязкость жидкости  $\nu$  велика. Тогда, как показано в работах [4, 30], для построения асимптотического (по малому параметру  $\varepsilon = 1/\nu$ ) решения этих уравнений на интервале времени  $[0, t_*]$ , имеющем величину порядка  $t_* = 1/\nu$ , можно применить теорию систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных [2]. Построим сначала формальное решение системы (53) в виде степенных рядов по малому параметру  $\varepsilon = 1/\nu$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{r}, t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{u}_n^{(1)}(\mathbf{r}, t); \quad q^{(1)}(\mathbf{r}, t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n q_n^{(1)}(\mathbf{r}, t); \\ \boldsymbol{\omega}^{(1)}(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \boldsymbol{\omega}_n^{(1)}(t). \end{aligned} \quad (54)$$

Подставляя (54) в (53) и приравнявая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , для определения  $\mathbf{u}_n^{(1)}, q_n^{(1)}$  получим квазистационарные краевые задачи, содержащие время  $t$  в качестве параметра. Эти функции зависят от геометрии полости и не зависят от движения тела. После определения  $\mathbf{u}_n^{(1)}, q_n^{(1)}$  для нахождения  $\boldsymbol{\omega}_n^{(1)}$  составим дифференциальные уравнения с начальными условиями, задаваемыми специальным образом [4].

Построим далее формальное решение системы (53), предварительно перейдя в ней к «быстрому» времени  $\vartheta = \nu t$ , в виде разложений

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{r}, \vartheta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{u}_n^{(2)}(\mathbf{r}, \vartheta); \quad q^{(2)}(\mathbf{r}, \vartheta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n q_n^{(2)}(\mathbf{r}, \vartheta); \\ \boldsymbol{\omega}^{(2)}(\vartheta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \boldsymbol{\omega}_n^{(2)}(\vartheta). \end{aligned} \quad (55)$$

Краевые задачи для функций  $\mathbf{u}_n^{(2)}, q_n^{(2)}$  получаются нестационарные. Начальные условия для функций  $\mathbf{u}_n^{(2)}, q_n^{(2)}, \boldsymbol{\omega}_n^{(2)}$  зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0^{(2)}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{r}); \quad \mathbf{u}_n^{(2)}(\mathbf{r}, 0) = 0; \\ \boldsymbol{\omega}_0^{(2)}(0) = \boldsymbol{\omega}^0; \quad \boldsymbol{\omega}_n^{(2)}(0) = 0 \quad (n > 0). \end{aligned}$$

Разложим теперь все коэффициенты рядов (54) по степеням  $t$

$$\mathbf{u}_n^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathbf{u}_{nk}^{(1)}(\mathbf{r}); \quad q_n^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k q_{nk}^{(1)}(\mathbf{r}); \quad \boldsymbol{\omega}_n^{(1)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \boldsymbol{\omega}_{nk}^{(1)}. \quad (56)$$

Подставим (56) в (54), сделаем замену  $\vartheta = \nu t$  в получившихся формальных разложениях и перегруппируем члены этих разложений так, чтобы получились ряды по степеням  $\varepsilon$ , коэффициенты которых при  $n$ -й степени  $\varepsilon$  обозначим соответственно



через  $u_n^{(3)}(r, \vartheta)$ ,  $q_n^{(3)}(r, \vartheta)$ ,  $\omega_n^{(3)}(\vartheta)$ ; тогда

$$\begin{aligned} u^3(r, \vartheta, \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n^{(3)}(r, \vartheta); \\ q^{(3)}(r, \vartheta, \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n q_n^{(3)}(r, \vartheta); \\ \omega^{(3)}(\vartheta, \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n^{(3)}(\vartheta). \end{aligned} \quad (57)$$

Составим, наконец, следующие выражения:

$$\begin{aligned} (u)_n &= (u)_n^{(1)} + (u)_n^{(2)} - (u)_n^{(3)}; \\ (q)_n &= (q)_n^{(1)} + (q)_n^{(2)} - (q)_n^{(3)}; \\ (\omega)_n &= (\omega)_n^{(1)} + (\omega)_n^{(2)} - (\omega)_n^{(3)}, \end{aligned} \quad (58)$$

где  $(\cdot)_n^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) означает частичные суммы рядов (54), (55) и (57) до степени  $n$  по параметру  $\varepsilon$ .

Выражения (58) являются частичными суммами асимптотических разложений решения задачи (53). Для достаточно малых значений  $\varepsilon = 1/\nu$  на произвольном конечном отрезке времени  $[0, t_*]$  справедливы следующие оценки отклонений частичных сумм асимптотических разложений от точного решения  $u(r, t, \varepsilon)$ ,  $q(r, t, \varepsilon)$ ,  $\omega(t, \varepsilon)$  задачи (53):

$$\begin{aligned} \|u(r, t, \varepsilon) - (u)_n\| &< a\varepsilon^{n+1}; \\ |q(r, t, \varepsilon) - (q)_n| &< a\varepsilon^{n+1}; \\ |\omega(t, \varepsilon) - (\omega)_n| &< a\varepsilon^{n+1}, \end{aligned} \quad (59)$$

где  $a$  — постоянная, не зависящая от  $t$  и  $\varepsilon$ ;  $\|\cdot\|$  — норма в  $L_2(\tau)$ . Функции с верхним индексом 2 быстро затухают со временем, и их влияние существенно только в пограничном слое (по времени)  $[0, t^0]$  где  $t^0 = -b\varepsilon \ln \varepsilon$ , а  $b$  — достаточно большая, но фиксированная при  $\varepsilon \rightarrow 0$  постоянная. Вне пограничного слоя на отрезке  $[t^0, t^*]$  в (59) вместо  $(u)_n$ ,  $(q)_n$ ,  $(\omega)_n$  можно взять  $(u)_n^{(1)}$ ,  $(q)_n^{(1)}$ ,  $(\omega)_n^{(1)}$  [4].

Таким образом, решение задачи (53) разбивается на две части, которые можно выполнять независимо. Первая, гидродинамическая часть задачи, сводится к решению некоторых стандартных краевых задач, зависящих от формы полости и не зависящих от движения тела, и затем к вычислению коэффициентов, характеризующих влияние жидкости на движение тела. Вторая, динамическая часть задачи, сводится к решению уравнений движения тела и не требует решения уравнений с частными производными. В значительной степени ход решения подобен тому, который имеет место для идеальной жидкости.

Построение асимптотики решения задачи (53) с точностью до членов порядка  $\varepsilon^2$ . Для определения нулевого приближения к решению задачи (53) вне интервала времени  $[0, t^0]$  имеем уравнения

$$\begin{aligned} \vartheta \cdot \frac{d\omega_0^{(1)}}{dt} + \omega_0^{(1)} \times \vartheta \cdot \omega_0^{(1)} - L(t) &= 0, \quad u_0^{(1)} = 0; \\ \omega_0^{(1)}(0) &= \omega^0 + \rho\vartheta^{-1} \cdot \int_{\tau} (r \times u^0) d\tau. \end{aligned}$$



Обозначим через  $\omega_0^{(1)}(t) = \Omega(t)$  решение этого уравнения и выпишем систему для определения первого приближения

$$\begin{aligned} \Delta u_1^{(1)} - \nabla q_1^{(1)} - \dot{\Omega} \times r &= 0; & \operatorname{div} u_1^{(1)} &= 0; \\ \theta \cdot \frac{d\omega_1^{(1)}}{dt} + \Omega \times \theta \cdot \omega_1^{(1)} - \theta \cdot \Omega \times \omega_1^{(1)} + \frac{dG_1^{(1)}}{dt} + \Omega \times G_1^{(1)} &= 0; \\ G_1^{(1)} &= \rho \int_{\tau} (r \times u_1^{(1)}) d\tau; & u_1^{(1)}|_{\sigma} &= 0; \\ \omega_1^{(1)}(0) &= -\theta^{-1} \cdot \left\{ \rho \int_{\tau} (r \times u_1^{(1)}(r, 0)) d\tau + \right. \\ & \left. + \int_0^{\infty} [\omega_0^{(2)} \times (\theta \cdot \omega_0^{(2)} + G_0^{(2)}) - \omega_0^{(1)}(0) \theta \cdot \omega_0^{(1)}(0)] d\theta \right\}. \end{aligned} \quad (60)$$

Значения  $\omega_0^{(2)}(\theta)$ ,  $G_0^{(2)}(\theta)$  находят из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial \theta} + \frac{d\omega_0^{(2)}}{d\theta} \times r - \Delta u_0^{(2)} + \nabla q_0^{(2)} &= 0; & \operatorname{div} u_0^{(2)} &= 0; \\ \theta \cdot \frac{d\omega_0^{(2)}}{d\theta} + \frac{dG_0^{(2)}}{d\theta} &= 0; & G_0^{(2)} &= \rho \int_{\tau} (r \times u_0^{(2)}) d\tau; \\ u_0^{(2)}|_{\sigma} &= 0; & u_0^{(2)}(r, 0) &= u^0(r); & \omega_0^{(2)}(0) &= \omega^0. \end{aligned}$$

Решение задачи (60) приведено в работе [30], где показано, что

$$\rho \int_{\tau} [r \times u_1^{(1)}(r, t)] d\tau = -\rho P \dot{\Omega},$$

здесь  $P$  — симметричный тензор, зависящий лишь от области  $\tau$ . С учетом последнего соотношения для функции  $\omega_1^{(1)}$  окончательно получаем

$$\begin{aligned} \theta \cdot \frac{d\omega_1^{(1)}}{dt} + \Omega \times \theta \cdot \omega_1^{(1)} - \theta \cdot \Omega \times \omega_1^{(1)} - \rho [P \cdot \ddot{\Omega} + \Omega \times P \cdot \dot{\Omega}] &= 0; \\ \omega_1^{(1)}(0) &= \theta^{-1} \cdot \left\{ \rho P \dot{\Omega}|_{t=0} - \theta \cdot \omega_0^{(1)}(0) \times \int_0^{\infty} [\omega_0^{(2)}(\theta) - \omega_0^{(1)}(0)] d\theta \right\}. \end{aligned} \quad (61)$$

Сумма  $\omega_0^{(1)}(t) + v^{-1}\omega_1^{(1)}(t)$  представляет собой первые два члена разложения маклореновского типа решения системы (53) вне пограничного слоя  $[0, t^0]$ .

При движении системы по инерции ( $L(t) \equiv 0$ ) качественный анализ поведения решений уравнений (61) приведен в работе [30], где на основе изложенного метода исследован также ряд других задач динамики тела с жидкостью в случае как полиого, так и частично заполнения полости.

#### 8. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ЖИДКОСТЬ, ПО ОТНОШЕНИЮ К КОНЕЧНОМУ ЧИСЛУ ПЕРЕМЕННЫХ

Когда идеальная или вязкая жидкость частично или целиком заполняет полость тела, а о характере движения жидкости никаких гипотез не делается (кроме естественных предположений о непрерывности и сплошности движения жидкости), задача об устойчивости движения представляет большие трудности.

Однако и в этих случаях можно свести задачу об устойчивости движения твердого тела с жидкостью к задаче об устойчивости по отношению к конечному числу переменных.



В зависимости от характера задачи можно ввести в рассмотрение величины вида

$$\rho_s = \int_{\tau} \Phi_s(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) d\tau$$

$$(s=1, \dots, m),$$

интегральным образом характеризующие движение жидкости в полости. Здесь  $\Phi_s$  — некоторые вещественные непрерывные ограниченные функции координат  $x_i$  и проекций  $v_i$  скоростей частиц жидкости. За величины  $\rho_s$  можно принять, например, проекции количества движения и момента количества движения жидкости и т. п. При введении таких величин задачу об устойчивости движения твердого тела с жидкостью можно ставить как задачу устойчивости по отношению к переменным  $q_j, \dot{q}_j$ , характеризующим движение твердого тела, и к величинам  $\rho_s$ , интегральным образом характеризующим движение жидкости. При таком подходе для решения задачи устойчивости можно использовать методы, разработанные для систем с конечным числом степеней свободы, в особенности метод функций Ляпунова [32].

**Пример [13].** Пусть твердое тело с полостью, целиком заполненной жидкостью, движется вокруг неподвижной точки  $O$  в поле сил с силовой функцией  $U(\gamma_3)$ . Для простоты предположим, что для точки  $O$  главные оси инерции тела и жидкости совпадают. Обозначим через  $A_i, B_i, C_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) моменты инерции относительно осей  $x_i$  соответственно твердого тела, жидкости и всей системы. Уравнения движения (4) — (6) с граничным условием (7) допускают частное решение

$$\omega_1 = \omega_2 = 0; \quad \omega_3 = \omega = \text{const}; \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0; \quad \gamma_3 = 1; \quad (62)$$

$$G_1^{(2)} = G_2^{(2)} = 0, \quad G_3^{(2)} = B_3\omega; \quad u_1 = u_2 = u_3 = 0,$$

описывающее равномерное вращение вокруг оси  $x_3$ , совмещенной с осью  $x'_3$ , системы как одного твердого тела. Здесь  $\gamma_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) — проекции на оси  $x_i$  орта оси  $x'_3$ .

Исследуем устойчивость движения (62) по отношению к величинам  $\omega_i, \gamma_i, G_i^{(2)}$ ,  $\rho \int_{\tau} \omega_i^2(x_1, x_2, x_3, t) d\tau$ , где функции  $\omega_i$  определяются равенствами

$$\omega_i = v_i + \kappa_i x_2 - \kappa_2 x_3, \quad \kappa_i = G_1^{(2)}/B_1 \quad (i=1, 2, 3).$$

Уравнения движения допускают энергетическое соотношение вида (18)

$$\frac{dV_1}{dt} \leq 0, \quad V_1 = T + \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left( A_i \omega_i^2 + B_i^{-1} G_i^{(2)2} + \rho \int_{\tau} \omega_i^2 d\tau \right) - U$$

и первые интегралы

$$V_2 = \sum_{i=1}^3 (A_i \omega_i + G_i^{(2)}) \gamma_i = \text{const}, \quad V_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

В окрестности невозмущенного движения (62) функция

$$V = 2V_1 - 2\omega V_2 + [C_3 \omega^2 + (\partial U / \partial \gamma_3) \gamma_3 = 1] V_3 + \frac{1}{4} \lambda V_3^2,$$

$$\lambda = \text{const} > (\partial^2 U / \partial \gamma_3^2 - \partial U / \partial \gamma_3) \gamma_3 = 1$$

при выполнении условия

$$(C_3 - C_1) \omega^2 + (\partial U / \partial \gamma_3) \gamma_3 = 1 > 0 \quad (C_1 \geq C_2) \quad (63)$$

является положительно определенной по отношению к  $\omega_i, \gamma_i, G_i^{(2)}$  ее производная по времени согласно уравнениям возмущенного движения  $dV/dt = 2dV_1/dt \leq 0$ . Следовательно, при условии (63) функция  $V$  удовлетворяет всем условиям теоремы об устойчивости по части переменных, что и доказывает устойчивость невозмущенного движения (62) твердого тела с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, по отношению к указанным выше величинам.

Отметим, что изложенным методом в работе [5] решена задача об устойчивости относительного равновесия на круговой орбите свободного твердого тела с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, притягиваемого неподвижным центром



по закону Ньютона, а в работе [20] — аналогичная задача для случая двух неподвижных притягивающих центров. Этот метод был использован также в работах [21, 24] при исследовании устойчивости установившихся движений для некоторых других задач динамики твердого тела с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью.

### 9. УСТОЙЧИВОСТЬ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ЖИДКОСТЬ

Изложим иной подход к задаче об устойчивости стационарных движений и, в частности, равновесий твердых тел с полостями, частично или целиком заполненными идеальными или вязкими жидкостями, опирающийся на определение устойчивости и идеи, развитые Ляпуновым в теории устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости [8]. Установившимся движениям соответствуют стационарные значения потенциальной энергии  $\Pi$  или  $W$ . Задача об устойчивости установившихся движений сводится к исследованию характера экстремума потенциальной энергии  $\Pi$  или  $W$ . Устойчивому движению соответствует минимум потенциальной энергии. Условия устойчивости (неустойчивости) установившихся движений в ряде важных случаев можно получить как достаточные условия определенной положительности (знакопеременности вместе с некоторыми дополнительными условиями) второй вариации потенциальной энергии  $\delta^2\Pi$  или  $\delta^2W$ .

Изложенную постановку задачи об устойчивости стационарных движений можно применять также для систем, содержащих упругие звенья. Постановка и метод решения задачи об устойчивости стационарных движений (равновесий) упругого тела с полостью, содержащей жидкость, даны в работе [26]. Приложения этой теории для ряда механических систем с упругими и жидкими элементами можно найти в работах [14, 16, 22, 23].

**Определение устойчивости** [13]. Рассмотрим некоторое установившееся движение системы, соответствующее стационарному значению измененной потенциальной энергии  $W$  [см. (22)] при заданном значении постоянной площадей  $k_0$ . Без уменьшения общности допустим, что корни уравнений (24)  $q_j = 0$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ); при этом жидкость имеет форму  $f_0$  относительного равновесия, ограниченную свободной поверхностью  $S_0$ , определяемой уравнением (25), и стенками  $\sigma_1$  полости.

С формой  $f_0$  равновесия жидкости будем сравнивать ее форму  $f$  в какой-либо момент возмущенного движения.

Рассмотрим какую-нибудь точку  $P$  поверхности  $S$  и наиболее близкую к ней точку  $P_0$  поверхности  $S_0$ . Для некоторого положения точки  $P$  на  $S$  расстояние  $PP_0$  делается самым большим из всех возможных для данного момента времени. Этот максимум  $l$  расстояния  $PP_0$  Ляпунов назвал *удалением* возмущенной поверхности жидкости от невозмущенной [8]. Кроме того, Ляпунов ввел в рассмотрение также *уклонение*  $\nabla$  формы  $f$  от формы  $f_0$ , принимая за последнее объем части формы  $f$ , находящийся вне формы  $f_0$ . При учете сил поверхностного натяжения помимо указанных величин введем в рассмотрение величину  $\Delta$  разности площадей  $S$  и  $S_0$  свободной поверхности жидкости в возмущенном и невозмущенном движениях [13, 25]; величину  $\Delta$  назовем *наклоном*.

**Определение** [13]. Если при всяком произвольно задаваемом положительном числе  $L$ , как бы мало оно ни было, может быть выбрано такое положительное число  $\lambda$ , что при всяких начальных значениях координат  $q_{j0}$  и скоростей  $\dot{q}_{j0}$  тела, удаления  $l_0$ , наклона  $\Delta_0$ , уклонения  $\nabla_0$  и относительных скоростей жидкости  $w_0$ , удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} |q_{j0}| &\leq \lambda; & |\dot{q}_{j0}| &\leq \lambda; & |l_0| &\leq \lambda; \\ |w_0| &\leq \lambda; & |\Delta_0| &\leq \lambda; & \nabla_0 &\geq \varepsilon l_0 \end{aligned} \quad (64)$$

и при всяком  $t \geq t_0$  или по крайней мере до тех пор, пока

$$\nabla > \varepsilon l, \quad (65)$$

выполняются неравенства

$$|q_j| < L; \quad |\dot{q}_j| < L; \quad |l| < L; \quad |\Delta| < L; \quad T_*^{(2)} < L, \quad (66)$$



то невозмущенное движение твердого тела с жидкостью устойчиво, в противном случае — неустойчиво.

Величину  $\varepsilon l$ , где  $\varepsilon > 0$  — фиксированное число, можно рассматривать как возможное отклонение жидкости [8]. Условие (65) связано с данным Ляпуновым определением устойчивости формы равновесия жидкости как такой формы, для которой после сообщения жидкости достаточно малых возмущений форма жидкости остается сколь угодно мало отличающейся от формы равновесия, по крайней мере до тех пор, пока на поверхности жидкости не образуются сколь угодно тонкие нитеобразные или листообразные выступы. Аналогичное явление имеет место и для двух- и трехмерного упругого континуума [34]. Это непроверяемое условие приходится вводить, ибо в противном случае из интеграла энергии (21) невозможно вывести заключение об устойчивости [8].

Отметим, что характеристики отклонения возмущенной формы от невозмущенной можно вводить по-разному, принимая за таковые другие величины, например  $L_2$  — нормы относительных смещений звеньев с распределенными параметрами.

**Задача минимума** [13, 19]. На основе известных теорем об устойчивости стационарных движений твердого тела с жидкостью [13, 25] задача об устойчивости невозмущенного движения, определяемого уравнениями (24), (25), приводится к задаче минимума измененной потенциальной энергии  $W$  системы, для решения которой разработаны эффективные методы [13, 18, 19].

В обычных случаях вопрос о характере экстремума функционала  $W$  решается исследованием его второй вариации  $\delta^2 W$ , вид которой зависит не только от самого функционала  $W$ , но и от выбора функций, характеризующих отклонение возмущенной формы сплошной среды от невозмущенной и удовлетворяющих определенным условиям. Если  $\delta^2 W$  определено положительно, то  $W$  имеет минимум; если же  $\delta^2 W$  может принимать отрицательные значения, то  $W$  не имеет минимума. И лишь в особых случаях, когда  $\delta^2 W$  неотрицательна, характер экстремума функционала  $W$  определяется членами выше второго порядка.

Рассмотрим в окрестности невозмущенного движения системы, для которого  $q_j = 0$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ), область

$$|q_j| \leq H, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (67)$$

где  $H > 0$  — достаточно малая постоянная величина. Можно показать [13, 19], что если при данных фиксированных  $q_j$  из области (67) свободная поверхность жидкости определяется уравнением (в случае пренебрежения поверхностным натяжением)

$$\frac{k_0^2}{2J^2} (x_1'^2 + x_2'^2) + U_2(x_1', x_2', x_3') = \text{const}, \quad (68)$$

то  $W$  имеет минимум. Для невозмущенного движения системы уравнение (68) принимает вид (25) при  $\alpha = 0$ .

При любой данной совокупности значений  $q_j$  из области (67) твердому телу с жидкостью в его полости поставим в соответствие некоторое преобразованное твердое тело [13, 19], состоящее из данного твердого тела и затвердевшей жидкости со свободной поверхностью (68). Тогда для преобразованного твердого тела  $W$  имеет минимум по сравнению со всеми возможными для жидкости достаточно близкими к (68) свободными поверхностями. С учетом этого обстоятельства задача о минимуме  $W$  при  $q_j = 0$  сводится к задаче о минимуме функции конечного числа переменных  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ). Эта функция представляет собой выражение  $W$  для преобразованных твердых тел.

Найдем изменение  $W$  для преобразованного твердого тела при переходе от положения, соответствующего невозмущенному движению системы при  $q_j = 0$ , к возмущенному положению в области (67). Этот переход можно осуществить в два этапа [13, 19]: 1) смещением в возмущенное положение всей системы как одного твердого тела; 2) деформированием формы  $f_0$  жидкости в форму  $f$  со свободной поверхностью (68). При этом приращения величин  $W$  и  $J$  имеют вид

$$\Delta W = \Delta_1 W + \Delta_2 W; \quad \Delta J = \Delta_1 J + \Delta_2 J, \quad (69)$$



где  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  — приращения, соответствующие указанным двум этапам перехода системы из невозмущенного положения в возмущенное.

С точностью до членов выше первого порядка малости

$$\Delta_1 J = \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{\partial J}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \dots, \quad (70)$$

и с точностью до членов выше второго порядка малости

$$\begin{aligned} \Delta_1 W &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j + \dots; \\ \Delta_2 W &= -\rho \int_{\Delta\tau} \left[ \frac{1}{2} \omega^2 (x_1'^2 + x_2'^2) + U_2(x_1', x_2', x_3') \right] d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \omega^2 J_0^{-1} [(\Delta_2 J)^2 + 2\Delta_1 J \Delta_2 J] + \dots, \end{aligned} \quad (71)$$

где нулевой индекс означает, что соответствующая величина вычисляется для невозмущенного положения системы,  $\Delta\tau = t - t_0$ .

Для вычисления  $\Delta_2 W$  введем систему координат  $x, y, z$ , жестко связанную с телом; ось  $z$  в невозмущенном положении системы совпадает с осью  $x'_3$ . Подынтегральную функцию в выражении для  $\Delta_2 W$ , преобразованную к переменным  $x, y, z$ , обозначим через  $\Phi(x, y, z, q_j)$ . Уравнение свободной поверхности (68) затвердевшей жидкости в переменных  $x, y, z$  имеет вид

$$\Phi(x, y, z, 0) = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + U_2(x, y, z) = c. \quad (72)$$

Предположим, что уравнение (72) можно разрешить однозначно относительно одной из переменных  $x, y, z$ , пусть относительно  $z$ ; для этого достаточно, чтобы на поверхности (72)  $\partial\Phi/\partial z \neq 0$ . Обозначим через  $Q$  проекцию на плоскость  $x, y$  свободной поверхности жидкости (72), ограниченной стенками полости.

Уравнение поверхности (68) в переменных  $x, y, z$ , принимает вид

$$\Phi_1(x, y, z, q_j) = c + \Delta c, \quad (73)$$

где постоянная  $\Delta c$  определяется из условия равенства объемов жидкости со свободными поверхностями (72) и (73). Это условие в первом приближении приводит к уравнению

$$\int_{\Delta\tau} d\tau = \int_Q dx dy \int_{z_0}^{z_1} dz = \int_Q \int \left( \frac{\partial z}{\partial \Phi} \right)_0 (\mu_1 - \mu_0) dx dy = 0, \quad (74)$$

где  $z_0$  и  $z_1$  — значения  $z$  соответственно для поверхностей (72) и (73), а вместо  $z$  введена переменная [18]  $\mu = \Phi(x, y, z, q_j) - c$ , при этом с точностью до малых первого порядка

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \Phi(x, y, z_0, q_j) - c = \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \dots; \\ \mu_1 &= \Phi(x, y, z_1, q_j) - c = \Delta c + \omega^2 J_0^{-1} (x^2 + y^2) \Delta J + \dots, \end{aligned} \quad (75)$$

так как в первом приближении функции  $\Phi(x, y, z, q_j)$  и  $\Phi_1(x, y, z, q_j)$  отличаются лишь на слагаемое  $\omega^2 J_0^{-1} (x^2 + y^2) \Delta J$ .



Далее, с точностью до членов первого порядка малости имеем

$$\Delta_2 J = \rho \int_{\Delta \tau} (x_1'^2 + x_2'^2) d\tau = \rho \iint_Q \left( \frac{\partial z}{\partial \Phi} \right)_0 (x^2 + y^2) (\mu_1 - \mu_0) dx dy. \quad (76)$$

Уравнения (74) и (76) с учетом (75) позволяют определить  $\Delta_2 J$  и  $\Delta c$  как функции  $q_j$ . Таким образом, находим

$$\Delta_2 W = -\frac{1}{2} \rho \iint_Q \left( \frac{\partial z}{\partial \Phi} \right)_0 (\mu_1^2 - \mu_0^2) dx dy + \frac{1}{2} \omega^2 J_0^{-1} [(\Delta_2 J)^2 + 2\Delta_1 J \Delta_2 J]. \quad (77)$$

По формуле (69) с учетом (70), (71), (76), (77) и (75)  $\Delta W$  можно представить в виде квадратичной формы переменных  $q_j$ . Условия определенной положительности последней будут достаточными условиями минимума  $W$  для твердого тела с полостью, содержащей жидкость, в поле внешних сил с потенциальной энергией  $\Pi$ .

При учете поверхностного натяжения задача о минимуме функционала  $W$  становится более сложной, однако и здесь при определенных условиях ее удается иногда свести к задаче о минимуме для функции конечного числа переменных [28, 29]. В этом случае

$$\delta^2 W = [Ll, l] + 2[l, \Phi] + F(q_j), \quad [u, v] = \int_{S_0} uv dS,$$

где  $L$  — линейный оператор;  $\Phi(q_j, x_i)$  — функция вида  $\Phi_1 q_1 + \dots + \Phi_{n-1} q_{n-1}$ ;  $\Phi_j$  — функции координатных параметров  $\xi, \eta$  поверхности  $S_0$ ;  $F(q_j)$  — квадратичная форма переменных  $q_1, \dots, q_{n-1}$ . Функция  $l$  должна удовлетворять условиям

$$\int_{S_0} (l, n) dS = 0; \quad \frac{dl}{dn_1} = \mu l \text{ на } s, \quad (78)$$

где  $n$  и  $n_1$  — орты нормали к поверхности  $S_0$  и внешней нормали к контуру  $s$  поверхности  $S_0$ ;  $\mu$  — функция точки контура  $s$ . Явный вид оператора  $L$  и функций  $\Phi_j$ ,  $F$ ,  $\mu$  приведен в работах [25, 29].

Для определенной положительности  $\delta^2 W$  необходимо, чтобы оператор  $L$  был определенно положительным. Пусть это условие выполнено. Рассмотрим первые два члена второй вариации  $\delta^2 W$ , считая их квадратичным функционалом по  $l$  с параметрами  $q_j$ . Этот функционал имеет минимум, который реализуется функцией  $l_1(q_j, x_i)$ , являющейся решением уравнения  $Ll + \Phi = c = \text{const}$  с граничным условием из (78), при этом значение постоянной определяется из условия изопериметричности (78). Функция  $l_1$  будет линейной функцией  $q_j$ , так как таковой является функция  $\Phi$ , а искомый минимум, равный  $[(Ll_1 + 2\Phi), l_1] = [l_1, \Phi]$ , будет квадратичной формой от  $q_j$ . Тогда  $\delta^2 W$  распадается на две части [28, 29], т. е.

$$\delta^2 W = [L(l - l_1), (l - l_1)] + V(q_j); \quad V(q_j) = [l_1, \Phi] + F(q_j),$$

и для ее определенной положительности достаточно потребовать определенной положительности оператора  $L$  и квадратичной формы  $V(q_j)$ .

**Пример.** Устойчивость вращения вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела с полостью, содержащей жидкость [13]. Для рассматриваемой механической системы без учета сил поверхностного натяжения жидкости потенциальная энергия и момент инерции относительно вертикали  $x_3^*$ , проходящей через неподвижную точку  $O$  тела, определяются формулами

$$\Pi = Mg \sum_{i=1}^3 x_{ci} \gamma_i; \quad J = \sum_{(i,j)} (J_1 \gamma_1^2 - 2J_{23} \gamma_2 \gamma_3),$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $x_{ci}$  и  $J_i, J_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ) — соответственно координаты центра тяжести и моменты инерции и произведения инерции тела с жидкостью в осях координат  $Ox_1 x_2 x_3$ .

Уравнения вида (24) допускают решение

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad (79)$$



если при произвольной постоянной величине  $\omega = k_0 J_0^{-1}$  выполняются условия  $x_{c1} = x_{c2} = 0$ ,  $J_{23}^0 = J_{31}^0 = 0$ .

Если жидкость частично заполняет полость, то ее свободная поверхность (25) имеет форму параболоида

$$\frac{\omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) - g x_3 = c. \quad (80)$$

Рассмотрим сначала случай, когда полость целиком заполнена жидкостью. Тогда условия минимума  $W$  приводятся к неравенству

$$(J_3 - J_1) \omega^2 - M g x_{c3} > 0 \quad (J_1 > J_2) \quad (81)$$

и имеют точно такой же вид, как и для тела с затвердевшей жидкостью.

Перейдем теперь к случаю неполного заполнения полости жидкостью. Оси  $x_1$  совместим с главными осями инерции твердого тела для точки  $O$ . Прежде всего рассмотрим случай  $\omega = 0$ , соответствующий равновесию системы. Свободной поверхностью жидкости в положении равновесия является часть  $Q$  плоскости  $x_3 = x_3^0$ , ограниченная стенками полости. Условия минимума  $W$  сводятся к неравенству [13]

$$M x_{c3}^0 + I_1^* \rho < 0 \quad (I_1^* \geq I_2^*), \quad (82)$$

где  $I_1^*$  и  $I_2^*$  — моменты инерции площадки  $Q$  для осей, параллельных осям  $x_1$  и  $x_2$  и проходящих через центр инерции площадки  $Q$ .

Сопоставление условия (82) с условием  $x_{c3}^0 < 0$  устойчивости равновесия тела с затвердевшей жидкостью, свободная поверхность которой совпадает с плоскостью  $x_3 = x_3^0$ , показывает, что наличие в полости тела жидкости со свободной поверхностью оказывает на устойчивость равновесия системы дестабилизирующее влияние.

Теперь рассмотрим случай  $\omega \neq 0$ . Для простоты примем, что область  $Q$  представляет собой кольцо, ограниченное окружностями с центрами на оси  $x_3$  и радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 > R_2 \geq 0$ ). Условия минимума  $W$  в этом случае сводятся к неравенству

$$(J_3^0 - J_1^0) \omega^2 - M g x_{c3}^0 - a > 0 \quad (J_1^0 \geq J_2^0), \quad (83)$$

$$a = \pi g \rho \int_{R_2}^{R_1} \left[ \frac{\omega^2}{g^2} \left( \frac{\omega^2}{2} r^2 - c \right) + 1 \right]^2 r^3 dr > 0.$$

Сопоставление условия (83) с условием  $(J_3^0 - J_1^0) \omega^2 - M g x_{c3}^0 > 0$  типа (81) устойчивости равномерного вертикального вращения твердого тела с жидкостью в его полости в случае, когда жидкость накрыта недеформируемой параболической крышкой, задаваемой уравнением (80), показывает, что наличие свободной поверхности жидкости оказывает дестабилизирующее влияние и на устойчивость стационарного вращения системы.

Поверхность параболоида (80) при большой угловой скорости  $\omega$  мало отличается от поверхности кругового цилиндра  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 = b^2$  и в пределе при  $\omega \rightarrow \infty$  совпадает с последней. Рассмотрим этот предельный случай, имеющий место для невесомой жидкости. Предположим, что цилиндр  $r = b$  пересекается со стенками полости по окружностям с центрами на оси  $x_3$  в точках с координатами  $x_3 = h \pm d$ . Условия минимума  $W$  в этом случае сводятся к неравенству [13]

$$\left[ J_3^0 - J_1^0 - \frac{2}{3} \pi \rho b^2 d (3h^2 + d^2) \right] \omega^2 - M g x_{c3}^0 > 0 \quad (J_1^0 \geq J_2^0). \quad (84)$$

Рассмотрим теперь эту же задачу при учете сил поверхностного натяжения жидкости [29]. Будем считать, что поверхность стенок полости  $\sigma$  является поверхностью вращения с профилем, задаваемым уравнением  $x_3 = \psi(r)$ ,  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . Пусть  $x_3 = f(r)$  — уравнение свободной поверхности  $S_0$  жидкости в невозмущенном движении, определяемой из уравнения (25) с граничным условием (10). Достаточные условия определенной положительности  $\delta^2 W$  имеют вид

$$(J_3^0 - J_1^0) \omega^2 - M g x_{c3} + \pi \rho v > 0 \quad (J_1^0 \geq J_2^0); \quad (85)$$

$$\mu = \left\{ \frac{1}{\psi_r - f_r} \left( \frac{1 + f_r^2}{1 + \psi_r^2} \psi_{rr} - f_{rr} \right) \right\}_{r=R} \leq 0 \quad (F_r = \partial F / \partial r),$$

где  $R$  — радиус окружности, по которой поверхность  $S_0$  пересекается с поверхностью стенок полости;  $v$  — постоянная, представляющая собой минимум квадратичного функционала,

$$v = \min_u P(u, f); \quad P(u, f) = \frac{1}{\rho} \int_0^R \left[ \rho g u^2 + \frac{\alpha u_r^2}{r (1 + f_r^2)^{3/2}} + \frac{\alpha u^2}{r^2 (1 + f_r^2)^{1/2}} + 2(g + \omega^2 f) r u \right] r dr - \frac{\mu}{\rho} R u^2(R).$$



Для цилиндрической полости  $r = R$  имеем  $\mu = 0$ . При отсутствии поверхностного натяжения  $\alpha = 0$  получаем  $\nu g = \int_0^R (g + \omega^2 r)^2 r^2 dr$ , и первое из условий (85) совпадает с (81).

При равновесии тела с жидкостью  $\omega = 0$  первое из условий (85) принимает вид  $a = \pi \rho \nu - Mg_{\text{сз}} > 0$ . При расчете параметров такого физического маятника нужно стараться выбрать их так чтобы величина  $a$  была достаточно большой, так как чем больше  $a$ , тем в большем диапазоне могут изменяться физические и конструктивные величины без нарушения устойчивости.

Пусть параметры  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  таковы, что свободной поверхностью  $S_0$  жидкости является часть плоскости  $x_3 = x_3^0$ . В этом случае

$$\nu = -\frac{R^4}{4} - \frac{\alpha R^2}{\rho g} I_2(\lambda R) \frac{\mu R - 1}{I_1'(\lambda R) - \mu I_1(\lambda R)};$$

$$I'(u) = \frac{dI}{du}; \quad \lambda = \sqrt{\frac{\rho g}{\alpha}},$$

где  $I_1(u)$  и  $I_2(u)$  — модифицированные функции Бесселя.

Отсюда следует, что с ростом  $\alpha$  величина  $\nu$  растет, если  $\mu R > 1$ . Если же  $1/R < \mu < \mu_* = \lambda I_1'(\lambda R)/I_1(\lambda R)$ , то с ростом  $\alpha$  величина  $\nu$  уменьшается до тех пор, пока  $\mu$  не превысит критического значения  $\mu_*$ . При  $\mu > \mu_*$  свободная поверхность жидкости становится неустойчивой [29].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вариационные методы в задачах о колебании жидкости и тела с жидкостью. [Сборник статей]. М., ВЦ АН СССР, 1962. 247 с.
2. Васильева А. Б., Бугузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., «Наука», 1973. 272 с.
3. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. I, М., Гостехиздат, 1948, с. 31—152.
4. Кобрин А. И. К задаче о движении тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, относительно центра масс в потенциальном поле массовых сил. — «ПММ», 1969, т. 33, вып. 3, с. 431—440.
5. Колесников Н. Н. Об устойчивости свободного твердого тела с полостью, заполненной несжимаемой вязкой жидкостью. — «ПММ», 1962, т. 26, вып. 4, с. 606—612.
6. Крейн С. Г., Моисеев Н. Н. О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью. — «ПММ», 1957, т. XXI, вып. 2, с. 169—174.
7. Луковский И. А. Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы. Киев, «Наукова думка», 1975. 135 с.
8. Ляпунов А. М. Задача минимума в одном вопросе об устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости. Собр. соч. т. III. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 237—360.
9. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. Киев, «Наукова думка», 1969, 250 с. Авт.: С. Ф. Феценко, И. А. Луковский, Б. И. Рабинович, Л. В. Докучаев.
10. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., Гостехиздат, 1957. 476 с.
11. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М., «Машиностроение», 1968. 532 с.
12. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М., ВЦ АН СССР, 1966. 269 с.
13. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965. 439 с.
14. Морозов В. М., Рубановский В. Н. Некоторые задачи об устойчивости стационарных движений твердого тела с деформируемыми элементами. — «Научные труды Ин-та механики МГУ», 1973, № 22, с. 109—161.
15. Нариманов Г. С. О движении сосуда, частично заполненного жидкостью; учет немалости движения последней. — «ПММ», 1957, т. XXI, вып. 4, с. 513—524.
16. Обифуркации и устойчивости установившихся движений сложных механических систем. — «ПММ», 1973, т. 37, вып. 3, с. 387—399. Авт.: В. М. Морозов, В. Н. Рубановский, В. В. Румянцев, В. А. Самсонов.
17. Охочимский Д. Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — «ПММ», 1956, т. XX, вып. 1, с. 3—9.
18. Пожарицкий Г. К. Задача минимума в задаче об устойчивости равновесия твердого тела с частичным жидким наполнением. — «ПММ», 1962, т. 26, вып. 4, с. 593—605.
19. Пожарицкий Г. К., Румянцев В. В. Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью. — «ПММ», 1963, т. 27, вып. 1, с. 16—26.
20. Рубановский В. Н. Об устойчивости движения свободного твердого тела с полостью, полностью заполненной вязкой жидкостью, в силовом поле двух неподвижных притягивающих центров. — «ПММ», 1968, т. 32, вып. 2, с. 291—297.
21. Рубановский В. Н. Об устойчивости движения тела в жидкости. — «ПММ», 1967, т. 31, вып. 1, с. 134—297.
22. Рубановский В. Н. Об устойчивости некоторых движений твердого тела с упругими стержнями и жидкостью. — «ПММ», 1972, т. 36, вып. 1, с. 43—59.



23. Рубановский В. Н. Устойчивость стационарных вращений тяжелого твердого тела с двумя упругими стержнями. — «ПММ», 1976, т. 40, вып. 1, с. 55—64.
24. Рубановский В. Н., Степанов С. Я. О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения. — «ПММ», 1969, т. 33, вып. 5, с. 904—912.
25. Румянцев В. В. К теории движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью. — «ПММ», 1966, т. 30, вып. 1, с. 51—66.
26. Румянцев В. В. О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость. — «ПММ», 1969, т. 33, вып. 6, с. 946—957.
27. Румянцев В. В. Устойчивость вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью. — «ПММ», 1957, т. XXI, вып. 6, с. 740—748.
28. Самсонов В. А. О задаче минимума функционала при исследовании устойчивости движения тела с жидким наполнением. — «ПММ», 1967, т. 31, вып. 3, с. 523—526.
29. Самсонов В. А. О некоторых задачах минимума в теории устойчивости движения тела с жидкостью. — В кн.: Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М., ВЦ АН СССР, 1968, с. 250—268.
30. Черноушко Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., ВЦ АН СССР, 1969. 230 с.
31. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого наполнена идеальной жидкостью. — «ПММ», 1957, т. XXI, вып. 2, с. 157—168.
32. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., «Наука», 1965. 207 с.
33. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962, с. 432—444.
34. Shield R. T., Green A. E. On certain methods in the stability theory of continuous systems. — «Archs. Ration. mech. Analysis», 1964, vol. 12, pp. 354—360.
35. The dynamic behavior of liquids in moving containers. NASA. Ed. by Abramson H. N. 1966, SP-106.

## Г л а в а XII

### ВИБРОУДАРНЫЕ СИСТЕМЫ

#### 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

*Виброударной* называют систему, совершающую колебательное движение, в процессе которого между ее отдельными звеньями происходят соударения.

Для многих типов машин (например, для всевозможных молотов, виброотбойных инструментов, машин для виброударных испытаний и т. п.) виброударные движения являются единственно возможными по условиям технологического процесса. Широко применяют методы виброгашения и виброизоляции, основанные на использовании эффекта соударений. Демпферы ударного действия просты по конструкции, надежны и эффективны в работе, особенно, если нужно погасить высокочастотные колебания.

Для ряда технологических процессов виброударные режимы при некоторых условиях оказываются более эффективными, чем чисто вибрационные. Это относится к строительным машинам, виброинструментам, транспортным устройствам, вибрационным просеивающим машинам (грохотам), к литейным машинам, виброплощадкам для уплотнения бетонной смеси и др.

Виброударным воздействиям часто подвергаются приборы, механизмы, передачи и устройства точной механики, работающие в сложных динамических условиях. Возникающие при этом динамические явления приходится рассматривать как неприятный, но неизбежный побочный эффект, сопутствующий нормальной работе устройства.

Соударения в кинематических парах приводят к возникновению динамических ошибок, к увеличению динамических нагрузок на звенья, снижают долговечность и надежность механизма, меняют его диссипативные свойства. Условия возникновения и устранения подобных режимов, вопросы их динамики и устойчивости приобретают все более важное значение. Решение указанных вопросов сводится к исследованию виброударных систем (ВУС) той или иной структуры.

Существенной структурной особенностью любой ВУС является наличие одной или нескольких ударных пар. *Ударной парой* называют совокупность двух звеньев системы, движущихся с соударениями, происходящими при определенных взаимных расположениях этих звеньев.