УДК 531.36

В. В. РУМЯНЦЕВ (Москва, СССР)

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ И УПРУГИХ ТЕЛ С ЖИДКИМ НАПОЛНЕНИЕМ

Рассматриваются уравнения движения сложных механических систем, состоящих из твердых, упругих и жидких тел. Уравнения движения представляют собою совместную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных с соответствующими граничными и начальными условиями. Обсуждается вопрос об устойчивости движений сложной системы. Предлагаются две постановки задачи об устойчивости сложных систем, ранее разработанные автором применительно к твердым телам с жидким наполнением. Одна из них связана с введением в рассмотрение интегральных характеристик движения сплошных сред и приводит задачу об устойчивости движения системы с бесконечным числом степеней свободы к задаче об устойчивости по отношению к конечному числу переменных, для решения которой эффективен метод функций Ляпунова. Вторая основана на понятиях устойчивости формы «равновесия» сплошной среды и устойчивости в смысле Ляпунова и сводит задачу об устойчивости установившегося движения сложной системы к проблеме минимума некоторого функционала. Указываются теоремы, составляющие основу методов исследования устойчивости движения сложных систем. Приводятся примеры.

1. Рассмотрим движение сложной голономной механической системы, состоящей из конечного числа твердых, упругих и жидких тел, а также материальных точек. Движение системы будем рассматривать по отношению к инерциальной декартовой системе координат $O'\xi'\eta'\zeta'$.

Одно из твердых тел системы примем за основное, или несущее, и жестко свяжем с ним систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в некоторой точке этого тела. Кроме того введем в рассмотрение систему осей Кенига $C\xi\eta\zeta$ с началом в центре C масс системы и осями, параллельными осям ξ', η', ζ', а также систему $Cxyz$, вращающуюся вокруг C по некоторому закону.

Положения и движения точек системы будем относить к подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Если ограничиться для простоты случаем $N+1$ твердых тел и материальных точек, одного жидкого тела, обладающего постоянной плотностью ρ_1 и занимающего в пространстве $x_1x_2x_3$ некоторую постоянную по объему, но, вообще, переменную по форме область τ_1 в полости некоторого тела, и одного упругого тела плотности ρ_2, занимающего область τ_2 в пространстве $x_1x_2x_3$, то уравнения движения системы можно записать в виде [1]

$$\frac{dQ}{dt} + \omega \times Q = K \quad \left(K = \sum_{\nu} F_\nu\right), \tag{1.1}$$

$$\frac{dG}{dt} + \omega \times G + v_0 \times Q = L \quad \left(L = \sum_{\nu} r_\nu \times F_\nu\right), \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial E}{\partial q_s} = \Phi_s \quad \left(\Phi_s = \sum_{k=1}^{N} F_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_s},\ s=1,\ldots,n\right), \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered}\frac{dv}{dt} + \omega \times v = F - \frac{1}{\rho_1}\operatorname{grad} p + \nu\,\Delta v \\ \operatorname{div} v = 0 \ \text{в области}\ \tau_1,\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered}\rho_2\left(\frac{dv}{dt} + \omega \times v\right) = \rho_2 F + \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_3}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \dot{r}) = 0 \quad \text{в области}\ \tau_2.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь

$$v = v_0 + \omega \times r + \dot{r} \tag{1.6}$$

— скорость точки системы с радиус-вектором r относительно точки O, скорость которой обозначена через v_0, ω — мгновенная угловая скорость несущего тела, точка сверху обозначает производную по времени t, взятую в системе координат $Ox_1\,x_2\,x_3$;

$$\begin{gathered}E = \frac{1}{2} M v_0^2 + M\, v_0 \cdot (\omega \times r_c) + \frac{1}{2}\,\omega\cdot\theta_0\cdot\omega + \\ + v_0 \cdot \sum_{\nu} m_\nu \dot{r}_\nu + \omega \cdot \sum_{\nu} r_\nu \times m_\nu \dot{r}_\nu + \frac{1}{2}\sum_{\nu} m_\nu \dot{r}_\nu^2\end{gathered} \tag{1.7}$$

— кинетическая энергия системы, $M = \sum\limits_{\nu} m_\nu$ — масса системы, знак $\sum\limits_{\nu}$ означает суммирование по всем точкам системы с массами m_ν (для частиц сплошной среды эти суммы представляются интегралами по области τ_s, причем $dm = \rho d\tau$), $r_c = \dfrac{1}{M}\, m_\nu z_\nu$ — радиус-вектор центра масс, θ_0 — тензор инерции системы для точки O;

$$Q = \mathrm{grad}_{v_0}\, E = M\, v_c,$$

$$G = \mathrm{grad}_{\omega}\, E = r_c \times M\, v_0 + \theta_0 \cdot \omega + \sum_{\nu} r_\nu \times m_\nu\, \dot{r}_\nu \tag{1.8}$$

— количество движения и момент относительно точки O количеств движения системы;

$$v_c = v_0 + \omega \times r_c + \dot{r}_c \tag{1.9}$$

— скорость центра масс; p и ν — гидродинамическое давление и кинематический коэффициент вязкости (для идеальной жидкости $\nu = 0$), Δ — оператор Лапласа; p_i — плотность упругих напряжений на площадках, ортогональных осям x_i; F—вектор заданной активной силы; $q_s(s = 1, \ldots, n)$— обобщенные координаты N носимых твердых тел и материальных точек, определяющие их положение в системе координат $Ox_1\, x_2\, x_3$ равенствами:

$$r_k = r_k\, (q_1, \ldots, q_n, t) \quad (k = 1, \ldots, N)\,. \tag{1.10}$$

Подразумевается, что с помощью соотношений (10) кинетическая энергия (7) выражена в виде функции от v_0, ω, q_s, $\dot{q}_s$ $(s = 1, \ldots, n)$ и некоторых интегралов по областям τ_j $(j = 1, 2)$, которыми представляются входящие в (7) суммы по частицам сплошных сред. Заметим, что положение несущего тела можно также определить с помощью обобщенных координат q_{n+r} $(r = 1,\ldots,6)$ и все уравнения движения системы записать в форме уравнений Лагранжа [1].

К уравнениям (1)—(5) надлежит добавить соотношения, выражающие зависимости напряжений от деформаций, обусловленные принимаемой моделью упругого тела [2], и динамические и кинематические граничные условия, а также начальные условия задачи. В результате будем иметь замкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений — обыкновенных и в частных производных, — движения сложной системы.

Эти уравнения позволяют решать разнообразные общие и частные задачи динамики сложных систем [1], включая задачи управления и стабилизации.

В случаях, когда задано движение некоторых частей или тел системы и требуется определить движение остальных тел, число уравнений, подлежащих исследованию, уменьшается на число уравнений, описывающих заданное движение тел. Так, во многих случаях задается движение центра масс системы и требуется определить ее движение относительно осей Кенига $C\xi\eta\zeta$. Эта задача решается исследованием всех уравнений движения системы, кроме уравнения (1), которое служит для определения сил, обеспечивающих заданное движение центра масс. Так как

$$G = G_c + r_c \times M\, v_c\,, \quad G_c = \sum_{\nu} \rho_\nu \times m_\nu\, (v_\nu - v_c)\,, \tag{1.11}$$

то с учетом уравнений (1) и (8), уравнение (2) принимает вид

$$\frac{d\,G_c}{d\,t} + \omega \times G_c = L_c \quad (L_c = \sum_\nu \rho_\nu \times F_\nu), \tag{1.12}$$

где $\rho_\nu = r_\nu - r_c$ — радиус-вектор точки относительно центра масс системы, причем $\sum_\nu m_\nu \rho_\nu = 0$. Заметим, что, если выражение для v_0 из (9) подставить в (7), то кинетическая энергия примет вид

$$E = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \omega \cdot \theta_c \cdot \omega + \omega \cdot \sum_\nu \rho_\nu \times m_\nu \dot{\rho}_\nu + \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \dot{\rho}_\nu^2, \tag{1.13}$$

где θ_c — тензор инерции системы для точки C. Равенство (13) выражает теорему Кенига, ибо

$$\frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu (v_\nu - v_c)^2 = \frac{1}{2} \omega \cdot \theta_c \cdot \omega + \omega \cdot \sum_\nu \rho_\nu \times m_\nu \dot{\rho}_\nu + \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \dot{\rho}_\nu^2 .$$

Кинетический момент системы в ее движении по отношению к осям Кенига

$$G_c = \operatorname{grad}_\omega E = \theta_c \cdot \omega + \sum_\nu \rho_\nu \times m_\nu \dot{\rho}_\nu , \tag{1.14}$$

где E берется в виде (13). По существу, равенство (13) есть выражение кинетической энергии в системе координат $Cxyz$, оси которой параллельны соответствующим осям системы координат $Ox_1\, x_2\, x_3$ и которая вращается с угловой скоростью ω. Если известно положение точек системы в одной из этих систем координат, то оно известно и в другой, так как $\rho_\nu = r_\nu - r_c$, $\rho_0 = - r_c$.

Ограничиваясь рассмотрением случая достаточно гладких непрерывных заданных сил, действующих на систему, и непрерывных начальных условий, будем далее предполагать существование и единственность решений уравнений движения сложной системы. Уравнения движения при определенных условиях допускают некоторые первые интегралы [1].

Частные решения этой системы уравнений могут быть найдены в ряде случаев из достаточно простых условий. Особый интерес представляют стационарные решения, описывающие равновесия или установившиеся движения сложной системы [1].

2. Состояние рассматриваемой сложной системы в любой момент времени t характеризуется ее обобщенными координатами q_i и скоростями $\dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n+6)$, проекциями $w_j(r, t)$ вектора относительной скорости $w = \dot{r}$ частиц жидкости на оси x_j $(j = 1, 2, 3)$, определенного в области τ_1, и проекциями $u_j(r^0, t)$ вектора перемещений точек упруго-

го тела $u(r^0, t)$, определенного в области τ_2^0, где r^0 — радиус-вектор точки упругого тела в его естественном состоянии. Функции $w_j(r, t)$ и $u_j(r^0, t)$ принадлежат некоторым функциональным пространствам $\Gamma_1(\tau_1)$ и $\Gamma_2(\tau_2)$, а величины q_i и $\dot{q}_i$ — конечномерному векторному пространству Γ_0. Следовательно, состояние системы характеризуется элементом x пространства состояний, являющегося декартовым произведением конечно-мерного Γ_0 и функциональных Γ_1 и Γ_2 пространств: $\Gamma = \Gamma_0 \times \Gamma_1 \times \Gamma_2$, и удовлетворяющего уравнениям, которые можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(x, L_1 x, \dots, L_m x, t) \tag{2.1}$$

вместе с граничными условиями, при этом $L_s(x)$ $(s = 1, \dots, m)$ обозначают операторы дифференцирования по пространственным переменным x_i $(i = 1, 2, 3)$, входящие в уравнения движения сложной системы.

Пусть известно какое-нибудь частное решение уравнений (1) $x(t, t_0, x_0)$, удовлетворяющее начальному условию $x_0 = x(t_0, t_0, x_0)$. Этому решению отвечает некоторое движение системы, которое примем за невозмущенное движение и поставим вопрос о его устойчивости, сравнивая с возмущенными движениями системы, имеющими место при несколько иных, достаточно близких к x_0 начальных условиях. Решение этого вопроса основывается на исследовании уравнений возмущенного движения, которые получаются из (1) подстановкой

$$x = x(t, t_0, x_0) + \xi,$$

где ξ — возмущение.

Благодаря тому, что уравнения возмущенного движения представляют собою систему обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, определения и методы исследования устойчивости конечномерных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \tag{2.2}$$

непосредственно неприменимы для систем с распределенными параметрами. Первым, кто подчеркнул недопустимость (без должного обоснования) каких-либо аналогий между сплошной средой и системой с конечным числом степеней свободы, был Ляпунов [3], изучавший устойчивость фигур равновесия вращающейся жидкости. Ляпунов предложил точное определение устойчивости формы равновесия жидкости и свел решение вопроса об устойчивости к проблеме минимума некоторого функционала, которую эффективно разрешил.

При изучении систем, содержащих (или представляющих собою) звенья с распределенными параметрами, часто применяют или метод пространственной дискретизации, когда звенья с распределенными параметрами заменяются некоторыми дискретными массами, или метод нормальных форм колебаний, когда смещения точек сплошной среды представляются рядами по собственным формам колебаний, которые обычно заменяются конечными суммами. В обоих случаях система уравнений движения сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и задачи устойчивости ставятся так же, как для систем с конечным числом степеней свободы.

Часто применяют также метод линеаризации исходных нелинейных уравнений, заменяя их линейными уравнениями первого приближения и сводя последние к обыкновенным уравнениям в конечномерном или функциональном пространствах. При этом под устойчивостью понимается ограниченность главных колебаний [4] или некоторых операторов [5].

Следует подчеркнуть то принципиальное обстоятельство, что при применении указанных методов одна задача заменяется, по существу, некоторой другой задачей, соответствие между которыми известно далеко не всегда. Получаемые при этом условия устойчивости не во всех случаях гарантируют устойчивость исходной системы, не говоря уж о том, что эти способы приводят, как правило, к весьма громоздким вычислениям.

Более предпочтительным является изучение исходных нелинейных уравнений возмущенного движения и получение на этой основе достаточных условий, гарантирующих устойчивость (в том или ином смысле) движения системы. Принципиальным при этом является вопрос об определении устойчивости.

Определение и строгий метод исследования устойчивости движения сложной системы, описываемой нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных, были предложены в работе [6] применительно к задаче об устойчивости движения твердого тела с полостями, содержащими жидкость. Этот метод, основанный на прямом методе Ляпунова, непосредственно применим к исходной системе уравнений. При этом устойчивость понимается в смысле устойчивости по Ляпунову по отношению к конечному числу величин q_i, $\dot{q}_i$, p_r или функций от них, где величины

$$p_r = \int_{\tau} \Phi_r (x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)\, d\tau \tag{2.3}$$

являются интегральными характеристиками движения сплошной среды, а $\Phi_r(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ — некоторые вещественные непрерывные ограниченные функции. Выбор этих функций зависит от характера рассматриваемой задачи и должен учитывать ее физические условия. При указанной постановке задача об устойчивости движения системы с бесконечным числом степеней свободы приводится к исследованию устойчивости по отношению к конечному числу величин $q_i, \dot{q}_i, p_r$ или функций от них, т. е. ставится как задача устойчивости по отношению к части переменных[1]. При такой постановке задачи весьма эффективным оказывается второй метод Ляпунова, однако не в его стандартной, а модифицированной форме. Дело в том, что при исследовании устойчивости движения не по всем, а по части переменных системы, классические теоремы второго метода Ляпунова непосредственно неприменимы, так как не удается, как правило, построить функции Ляпунова, зависящие лишь от интересующих нас переменных. Применение метода к таким задачам основывается на некоторых теоремах об устойчивости по части переменных [8, гл. III, § 2], представляющих собою модификации теорем Ляпунова. Функции, удовлетворяющие названным теоремам, будут представлять собою, с учетом (3), функционалы исходных переменных. Для их построения эффективен способ Четаева [9].

Этим методом был решен ряд задач об устойчивости твердых тел с полостями, содержащими жидкость.

Пример 2.1. Рассмотрим задачу об устойчивости вращения около неподвижной точки O твердого тела с ротором и полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, в поле сил с функцией $u(\gamma_3)$, где γ_i — косинусы углов между неподвижной осью $O\zeta$ и осями x_i ($i = 1, 2, 3$), которые будем считать главными осями инерции твердого тела с ротором, а также и полости. Пусть ось ротора направлена по оси x_3, а относительная угловая скорость $\dot q = \text{const}$; далее, пусть $R = J\dot q$ — гиростатический момент ротора.

За интегральные характеристики (3) движения жидкости примем проекции G_{2i} на оси x_i момента количеств движения жидкости

$$G_2 = \rho_1 \int\limits_{\tau_1} r \times v \, d\tau.$$

Уравнения движения системы имеют частное решение

$$\begin{gathered}\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \\ G_{21} = G_{22} = 0, \quad G_{23} = C_2\,\omega, \quad w_i = 0,\end{gathered} \tag{2.4}$$

где A_s, B_s, C_s — моменты инерции тела с ротором ($s = 1$) и жидкости ($s = 2$), ω_i — проекции ω на оси x_i.

В возмущенном движении положим

$$\omega_3 = \omega + z_1, \quad G_{23} = C_2\,\omega + z_2, \quad \gamma_3 = 1 + z_3.$$

Уравнения возмущенного движения допускают одно интегральное соотношение [8]

$$V_1 = A_1\omega_1^2 + B_1\omega_2^2 + C_1(2\omega z_1 + z_1^2) + \frac{1}{A_2} G_{21}^2 + \frac{1}{B_2} G_{22}^2 +$$

[1] Ошибочно мнение [7], будто исходная система тем самым заменяется дискретной системой; разумеется, она остается сама собой и описывается теми же уравнениями (1), но под ее устойчивостью понимается устойчивость по отношению к конечному числу величин.

$$+ 2\omega z_2 + \frac{1}{C_2} z_2^2 - 2\Gamma_1 z_3 - \Gamma_2 z_3^2 + \rho_1 \int\limits_{\tau_1} v_x^2 \, d\tau + \cdots \leqslant \text{const},$$

где многоточие обозначает члены выше второго порядка малости по z_3,

$$\Gamma_1 = \frac{du}{d\gamma_3}, \quad \Gamma_2 = \frac{d^2 u}{d\gamma_3^2} \quad \text{при} \quad \gamma_3 = 1, \quad v_x = v - \theta_2^{-1} G_2 \times r,$$

и первые интегралы

$$V_2 = (A_1 \omega_1 + G_{21}) \gamma_1 + (B_1 \omega_2 + G_{22}) \gamma_2 + C_1 (z_1 + \omega z_3 + z_1 z_3) +$$
$$+ (C_2 \omega + z_2) z_3 + z_2 + R z_3 = \text{const},$$
$$V_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + z_3^2 + 2 z_3 = 0,$$

соответствующие уравнению энергии, интегралу момента количеств движения и геометрическому интегралу исходных уравнений движения. Рассмотрим функцию

$$V = V_1 - 2\omega V_2 + (C\omega^2 + \Gamma_1 + R\omega) V_3 + \frac{1}{4} \lambda V_3^2 =$$

$$= A_1 \omega_1^2 - 2\omega (A_1 \omega_1 + G_{21}) \gamma_1 + \frac{1}{A_2} G_{21}^2 + (C\omega^2 + \Gamma_1 + R\omega) \gamma_1^2 +$$

$$+ B_1 \omega_2^2 - 2\omega (B_1 \omega_2 + G_{22}) \gamma_2 + \frac{1}{B_2} G_{22}^2 + (C\omega^2 + \Gamma_1 + R\omega) \gamma_2^2 +$$

$$+ C_1 z_1^2 - 2\omega (C_1 z_1 + z_2) z_3 + \frac{1}{C_2} z_2^2 + (C\omega^2 + \Gamma_1 + R\omega - \Gamma_2 +$$

$$+ \lambda) z_3^2 + \rho_1 \int\limits_{\tau_1} v_x^2 \, d\tau + \ldots, \tag{2.5}$$

где постоянная $\lambda > \Gamma_2 - \Gamma_1$, $A = A_1 + A_2$, $B = B_1 + B_2$, $C = C_1 + C_2$.

Производная $\dot{V} \leqslant 0$. Для определенной положительности функции (5) по отношению к ω_i, G_{2i}, γ_i, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$(C - A)\omega^2 + R\omega + \Gamma_1 > 0 \quad (A \geqslant B). \tag{2.6}$$

Условие (6) является достаточным условием устойчивости движения (4) по отношению к величинам ω_i, G_{2i}, γ_i, $\rho_1 \int\limits_{\tau_1} v_x^2 \, d\tau$. При выполнении этого условия возмущенные движения системы, достаточно близкие к (4), в случае вязкой жидкости в полости будут асимптотически стремиться к равномерному вращению твердого тела и жидкости как одного твердого тела вокруг оси ζ. Угловая скорость предельного движения будет равна $G_\zeta C^{-1}$. При изменении в условии (6) знака неравенства на противоположный, движение (4) тела с вязкой жидкостью будет неустойчивым по отношению к ω_i, G_{2i}, γ_i.

Для случая однородного для сил тяжести $u(\gamma_3) = Mg\,x_{c3}\gamma_3$, условие (6) принимает вид

$$(C - A)\,\omega^2 + R\omega > Mg\,x_{c3} \quad (A \geqslant B), \tag{2.7}$$

где x_{c3} — координата по оси x_3 центра тяжести системы $(x_{c1} = x_{c2} = 0)$. Отметим, что задача об устойчивости вращения (4) тяжелого симметричного волчка с осесимметричной полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью, в линейной постановке ранее была изучена С. Л. Соболевым [5], показавшим, в частности, что при выполнении (при $R = 0$) условия (7) некоторый оператор, характеризующий возмущенное движение системы, будет ограниченным.

Данная постановка задачи об устойчивости оказалась плодотворной и в проблемах устойчивости движения сплошных сред, описываемых уравнениями только в частных производных, при надлежащем выборе интегральных характеристик движения среды, или, что то же, метрики пространства состояний. Устойчивость по двумя метрикам [10, 11], когда достаточная малость начальных возмущений по обеим метрикам обеспечивает малость расстояния по одной метрике, также относится к классу задач об устойчивости по части переменных.

Другое определение устойчивости движения сложных систем, первоначально данное [12] тоже применительно к задаче об устойчивости твердого тела с жидкостью, представляет собою синтез определений устойчивости по Ляпунову по отношению к переменным $q_j, \dot{q}_j$ и к формам «равновесия» [3] звеньев с распределенными параметрами. Решение задачи об устойчивости (в указанном смысле) установившегося движения системы приводится, на основе теорем [8, гл. IV, § 3. 13], к проблеме минимума функционала энергии W. Последняя для случая твердого тела с жидкостью без поверхностного натяжения сводится [8, гл. IV, §4] к задаче минимума функции конечного числа переменных. При учете поверхностного натяжения задача минимума функционала становится более сложной, но также допускает эффективное решение в случаях, когда потенциальная энергия сил поверхностного натяжения имеет минимум для рассматриваемых форм равновесия жидкости [14].

В большинстве практически интересных случаев задача минимума функционала W может быть решена исследованием второй вариации $\delta^2 W$.

Для минимума функционала W необходимо, чтобы его вторая вариация была неотрицательна, и достаточно, чтобы она была положительно определенной. Задача об условиях определенной положительности $\delta^2 W$ известным образом [15] может быть сведена к задаче положительности наименьшего собственного значения соответствующей краевой задачи. Для решения последней можно с успехом использовать метод Ритца.

Пример 2.2. Рассмотрим движение вокруг неподвижной точки O твердого тела, имеющего полость, частично заполненную жидкостью, поверхностным натяжением которой будем пренебрегать. С твердым телом неизменно связана ось симметричного динамически уравновешенного ротора, постоянный относительный гиростатический момент которого R направлен по оси x_3, а также другие тела и материальные точки, обобщенные относительные координаты которых суть q_i ($i = 1, \dots, n$). Будем предполагать, что на систему действуют силы тяжести, а также внутренние силы с потенциальной энергией $V(q_1, \dots, q_n)$.

Установившиеся движения системы определяются из условия

$$\delta W = 0, \tag{2.8}$$

где

$$W = \frac{1}{2}\frac{(G - R\,i_3 \cdot k)^2}{J} + V(q_1, \dots, q_n) + Mg(x_{c1}\gamma_1 + x_{c2}\gamma_2 + x_{c3}\gamma_3) \tag{2.9}$$

измененная потенциальная энергия системы,

$$J = A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2 - 2D\gamma_2\gamma_3 - 2E\gamma_3\gamma_1 - 2F\gamma_1\gamma_2 \tag{2.10}$$

— момент инерции относительно вертикальной оси $O\zeta$, единичный вектор которой обозначен через k; A, B, C, D, E, F — моменты и произведения инерции системы для осей x_1, x_2, x_3 с единичными векторами i_s ($s = 1, 2, 3$); G—величина кинетического момента системы для установившегося движения.

Условие (8) эквивалентно уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_i} = 0 \ (i = 1, 2), \quad \frac{\partial W}{\partial q_j} \ (j = 1, \dots, n), \quad \rho_1 \frac{(G - R)^2}{J^2} r = \rho_1 g k + \operatorname{grad} p \tag{2.11}$$

и граничным условиям для жидкости; здесь, r обозначает вектор кратчайшего расстояния частицы жидкости от оси ζ.

Первые два уравнения (11) имеют следующий вид:

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = R\omega\gamma_1\gamma_3^{-1} - \omega^2[A\gamma_1 - F\gamma_2 - E\gamma_3 - (C\gamma_3 - E\gamma_1 - D\gamma_2)\gamma_1\gamma_3^{-1}] +$$
$$+ Mg(x_{c1} - x_{c3}\gamma_1\gamma_3^{-1}) = 0,$$
$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_2} = R\omega\gamma_2\gamma_3^{-1} - \omega^2[B\gamma_2 - F\gamma_1 - D\gamma_3 - (C\gamma_3 - E\gamma_1 - D\gamma_2)\gamma_2\gamma_3^{-1}] +$$
$$+ Mg(x_{c2} - x_{c3}\gamma_2\gamma_3^{-1}) = 0.$$

Эти уравнения допускают решение

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \ \gamma_3 = 1 \tag{2.12}$$

при произвольной величине $\omega = \dfrac{G - R}{J}$, если выполняются условия

$$x_{c1} = x_{c2} = 0, \quad D = E = 0,$$

т. е. если центр тяжести системы расположен на оси x_3, являющейся при этом главной осью инерции системы. Для решения (12) следующие n уравнений (11) принимают вид

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial C}{\partial q_i} + Mg\frac{\partial x_{c3}}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

и служат для определения координат $q_i = q_i^0$ носимых тел и точек в установившемся движении. Из последнего уравнения (11) получаем уравнение свободной поверхности жидкости

$$\frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2) - g x_3 = c. \tag{2.13}$$

Устойчивость рассматриваемого установившегося движения системы определяется характером экстремума W. Нетрудно видеть, что

$$\delta^2 W = [(C^0 - A^0)\omega^2 + R\omega - Mg x_{c3}^0 - a]\gamma_1^2 + [(C^0 - B^0)\omega^2 + R\omega - Mg x_{c3}^0 - a]\gamma_2^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\gamma_1 \partial q_i}\right)^0 \gamma_1 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial\gamma_2 \partial q_i}\right)^0 \gamma_2\right](q_i - q_i^0) + \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}\right)^0 (q_i - q_i^0)(q_j - q_j^0), \tag{2.14}$$

где

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\gamma_1 \partial q_i}\right)^0 = \omega^2\left(\frac{\partial E}{\partial q_i}\right)^0 + Mg\left(\frac{\partial x_{c1}}{\partial q_i}\right)^0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\gamma_2 \partial q_i}\right)^0 = \omega^2\left(\frac{\partial D}{\partial q_i}\right)^0 + Mg\left(\frac{\partial x_{c2}}{\partial q_i}\right)^0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}\right)^0 = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)^0 - \frac{1}{2}\omega^2\left(\frac{\partial^2 C}{\partial q_i \partial q_j}\right)^0 + Mg\left(\frac{\partial^2 x_{c3}}{\partial q_i \partial q_j}\right)^0$$

и

$$a = \pi\rho g\int_{R_2}^{R_1}\left[\frac{\omega^2}{g^2}\left(\frac{\omega^2}{2}r^2 - c\right) + 1\right]^2 r^3\,dr$$

в случае пересечения поверхности (13) со стенками полости по окружностям с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 > R_2 \geqslant 0$) и центрами на оси x_3.

Для определенной положительности второй вариации $\delta^2 W$ необходимо и достаточно выполнение условий Сильвестра

$$\begin{gathered}(C^0 - A^0)\omega^2 + R\omega - Mg x_{c3}^0 - a > 0 \quad (A^0 \geqslant B^0),\\ \Delta_{2+i} > 0 \quad (i = 1, \dots, n),\end{gathered} \tag{2.15}$$

где Δ_{2+i} обозначают главные диагональные миноры дискриминанта квадратичной формы (14), соответствующие q_i.

Неравенства (15) являются достаточными условиями устойчивости рассматриваемого установившегося движения системы по отношению к ω_j, γ_j, q_i и форме «равновесия» жидкости.

В случае вязкой жидкости и действия диссипативных сил Q_i таких, что $\sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i \leqslant 0$, причем $\sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i = 0$ только при $\dot{q}_i = 0$ $(i = 1, \dots, n)$, при выполнении условий (15) возмущенное движение системы, достаточно близкое к рассматриваемому невозмущенному движению, асимптотически стремится к равномерному вращению вокруг вертикали всей системы, кроме ротора, как одного твердого тела. При изменении на противоположный знака одного или нескольких из неравенств (15) движение будет неустойчивым.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Румянцев, Некоторые задачи динамики сложных систем. В сб. «Проблемы прикладной математики и механики», М., «Наука», 1971.
2. Л. И. Седов, Механика сплошной среды. М., «Наука», 1970.
3. А. М. Ляпунов, Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости. Собр. соч., т. III, Изд-во АН СССР, М., 1959.
4. Н. Н. Моисеев, Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность. Математический сб., т. 32, вып. I, 1953.
5. С. Л. Соболев, О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью. ПМТФ, № 3, 1960.
6. В. В. Румянцев. Об устойчивости вращательных движений твердого тела с жидким наполнением. ПММ, т. XXIII, вып. 6, 1959.
7. L. Meirovitch, Reply by Author to V. V. Rumyantsev. AIAA Journal, vol. 9, № 9, 1971.
8. Н. Н. Моисеев, В. В. Румянцев, Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. «Наука», М., 1965.
9. Н. Г. Четаев, Устойчивость движения. «Наука», М., 1965.
10. А. А. Мовчан, Устойчивость процессов по двум метрикам. ПММ, т. XXIV, вып. 6, 1960.
11. P. K. C. Wang, Stability analysis of elastic and aeroelastic systems via Lyapunov's direct method. Journal of the Franklin Institute, vol. 281, № 1, 1966.
12. В. В. Румянцев, Об устойчивости равновесия твердого тела, имеющего полости, наполненные жидкостью. ДАН СССР, т. 124, № 2, 1959.
13. В. В. Румянцев, О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость. ПММ, т. 33, вып. 6, 1969.
14. В. А. Самсонов, О некоторых задачах минимума в теории устойчивости движения тела с жидкостью. В кн. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости». ВЦ АН СССР, М., 1968.
15. Е. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, М.-Л., 1945.