А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

НАЦИОНАЛЬНЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

МЕХАНИКА
в
СССР
ЗА 50 ЛЕТ

В ЧЕТЫРЕХ ТОМАХ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Л. И. СЕДОВА (главный редактор), Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧА,
А. Ю. ИШЛИНСКОГО, М. А. ЛАВРЕНТЬЕВА, Г. К. МИХАЙЛОВА,
Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ и Г. Г. ЧЕРНОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

МЕХАНИКА
в
СССР
ЗА 50 ЛЕТ

ТОМ 1

ОБЩАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

531
М 55
УДК 531/534

МЕХАНИКА В СССР ЗА ПЯТЬДЕСЯТ ЛЕТ

ТОМ 1

ОБЩАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

ТОМ 2

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

ТОМ 3

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

ТОМ 4

БИБЛИОГРАФИЯ

МЕХАНИКА В СССР ЗА ПЯТЬДЕСЯТ ЛЕТ
том 1
Общая и прикладная механика
М., 1968 г., 416 стр. с илл.
Редактор *Г. К. Михайлов*
Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод* Корректоры *Е. А. Белицкая, М. Л. Липелис*

* * *

Сдано в набор 25/V 1968 г. Подписано к печати 24/X 1968 г. Бумага $70\times108^1/_{16}$. Физ. печ. л. 26. Условн. печ л. 36,4. Уч.-изд. л. 34,58. Тираж 7000 экз. Т-14861. Цена книги 2 р. 68 к. Заказ 263

* * *

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

* * *

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, Трехпрудный пер., 9.

2-4-2
114-68

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАЦИОНАЛЬНЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

МЕХАНИКА
в
СССР
ЗА 50 ЛЕТ

В ЧЕТЫРЕХ ТОМАХ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Л. И. СЕДОВА (главный редактор), Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧА,
А. Ю. ИШЛИНСКОГО, М. А. ЛАВРЕНТЬЕВА, Г. К. МИХАЙЛОВА,
Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ и Г. Г. ЧЕРНОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

МЕХАНИКА
в
СССР
ЗА 50 ЛЕТ

ТОМ 1

ОБЩАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

531
М 55
УДК 531/534

МЕХАНИКА В СССР ЗА ПЯТЬДЕСЯТ ЛЕТ

ТОМ 1

ОБЩАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

ТОМ 2

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

ТОМ 3

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

ТОМ 4

БИБЛИОГРАФИЯ

МЕХАНИКА В СССР ЗА ПЯТЬДЕСЯТ ЛЕТ

том 1

Общая и прикладная механика

М., 1968 г., 416 стр. с илл.

Редактор *Г. К. Михайлов*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод* Корректоры *Е. А. Белицкая, М. Л. Липелис*

* * *

Сдано в набор 25/V 1968 г. Подписано к печати 24/X 1968 г. Бумага $70\times108^1/_{16}$. Физ. печ. л. 26. Условн. печ л. 36,4. Уч.-изд. л. 34,58. Тираж 7000 экз. Т-14861. Цена книги 2 р. 68 к. Заказ 263

* * *

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

* * *

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, Трехпрудный пер., 9.

2-4-2
114-68

ПРЕДИСЛОВИЕ

Механика в СССР пришла к своему пятидесятилетию с фундаментальными результатами. Сейчас для всех очевидны и общепризнаны советские достижения в авиации, ракетной технике и в ряде других областей промышленности, транспорта и строительства. Эти успехи и особенно выдающиеся успехи в области космических полетов стали возможны благодаря высокому уровню теоретических исследований по механике и наличию в нашей стране большого числа талантливых высококвалифицированных кадров.

Механика, как известно, определяет значительную часть теоретических основ в большинстве отраслей техники. Вместе с развитием техники расширяется и сфера разнообразных приложений механики, возрастает ее значение для дальнейшего прогресса, для осуществления важнейших задач, стоящих перед народным хозяйством нашей страны. В связи с этим особую важность приобретает подведение итогов и анализ современных путей развития механики.

Настоящий сборник был задуман как серия обзоров по актуальным разделам современной механики, включая основную проблематику общей механики, механики жидкости и газа и механики деформируемого твердого тела. В обзорах должно было быть освещено в широком плане развитие рассматриваемых областей механики в СССР за 50 лет с указанием места советских достижений в мировой науке, а также дан критический анализ современного состояния и рассмотрены перспективы дальнейшего развития науки.

Перед авторами обзоров была поставлена задача дать читателю представление о современном положении в механике и о плодотворных и нужных направлениях научной работы. Хотелось, чтобы обзоры послужили основой для ориентировки научной общественности, стимулом для концентрации сил, организации и постановки научных исследований в этих направлениях, а также для правильного подхода к вопросам преподавания механики в вузах.

Хотя перед всем авторским коллективом сборника была поставлена единая задача, отдельные обзоры оказались построенными по-разному. Все они носят более или менее яркий отпечаток индивидуальных интересов и вкусов их авторов, что, конечно, вполне естественно, когда в сборнике участвуют высококвалифицированные специалисты, сами внесшие значительный вклад в те отделы науки, о которых они пишут.

Не все разделы механики освещены в настоящем сборнике равномерно, и в этом смысле он не предназначен заменить собой энциклопедию достижений механики в СССР. Читатель не найдет здесь обзоров по ряду классических разделов механики, вполне сложившихся в первой половине века и мало развивающихся в настоящее время. Так, например, в сборнике нет специальной статьи по аэродинамике крыла в дозвуковом потоке, хотя в этой области советскими учеными были получены в 30-х и 40-х годах выдающиеся результаты. По разным причинам в сборнике отсутствуют обзоры и по отдельным специальным актуальным проблемам механики. Рассчитанный главным образом на теоретиков, сборник не содержит также сколь бы то ни было полного обозрения экспериментальных исследований, осуществленных в СССР.

Следует также иметь в виду, что настоящий сборник не является продолжением предыдущих юбилейных изданий, подводивших итоги развития механики в СССР за 15 и 30 лет, и составлен независимо от них и от других сборников, содержащих обзоры по различным разделам механики *).

В качестве справочного материала, претендующего на известную полноту, можно рассматривать только библиографию работ по механике, изданных в СССР в 1917—1967 гг., которая составит последний том серии.

Ряд статей настоящего сборника представляет собой в той или иной степени переработанные и дополненные тексты обзорных докладов, зачитанных на III Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (январь — февраль 1968 г.).

*) Значительное число таких обзоров, опубликованных в разных сборниках, указано в списке, помещенном в конце тома.

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

В. В. РУМЯНЦЕВ

§ 1. Введение

Хотя теория устойчивости движения является одним из разделов динамики — науки о действительных равновесиях и движениях материальных систем, она сформировалась как таковая сравнительно недавно и значительно позже остальных разделов динамики.

Как известно, еще Г. Галилей и И. Ньютон открыли начала динамики и доказали их достоверность опытами над падением тяжелых тел и объяснением движения планет; Ж. Л. Лагранж создал общий метод решения задач динамики. Было, однако, замечено, что не каждое состояние механической системы, отвечающее математически строгому решению уравнений движения или равновесия, наблюдается на самом деле. Это объясняется тем, что в действительности всегда существуют неучитываемые в уравнениях движения малые силы и незначительные отклонения в начальном состоянии материальной системы, которые и возмущают равновесия или движения. Движения, мало изменяющиеся при возмущениях, были названы устойчивыми, а прочие — неустойчивыми. Таким образом, для выяснения действительной осуществимости движений из числа всех теоретически возможных необходимо было иметь принцип выбора устойчивых движений. Такого общего принципа в динамике не было дано — она приняла характер науки об идеализированных системах и для своего строгого применения к нашей природе принципиально каждый раз требует решения задач устойчивости (Н. Г. Четаев, 1946), имеющих, таким образом, важное теоретическое и прикладное значение. Лишь в статике существовал принцип Торричелли, согласно которому в системе тяжелых тел, находящихся в равновесии, центр тяжести занимает относительно наиболее низкое положение из всех возможных. Лагранж обобщил этот принцип, доказав теорему об устойчивости изолированного положения равновесия материальной системы, когда силовая функция действующих на систему сил имеет максимум в этом положении. Э. Дж. Раус разработал метод игнорирования циклических координат, что позволило ему путем обобщения теоремы Лагранжа найти критерий устойчивости стационарных движений. Между тем, задачей устойчивости занимались многие ученые и среди них такие выдающиеся механики, как В. Томсон (лорд Кельвин), Н. Е. Жуковский, А. Пуанкаре. Общую задачу об устойчивости движений для систем с конечным числом степеней свободы удалось решить лишь А. М. Ляпунову в его знаменитом сочинении «Общая задача об устойчивости движения» (1892; Собр. соч., т. 2, 1956).

Метод, которым до Ляпунова обыкновенно пользовались при исследовании устойчивости, состоял в замене первоначальных уравнений возмущенного движения системы линейными уравнениями, получаемыми из исходных отбрасыванием всех членов выше первого порядка малости относительно переменных.

Однако, как отметил Ляпунов, законность такого упрощения априори ничем не оправдывается, ибо дело приводится к замене рассматриваемой задачи другой, с которой она может не находиться ни в какой связи. Учет членов второго и более высоких порядков малости в уравнениях возмущенного движения, что пытались делать некоторые исследователи (например, Раус), не давал новых оснований для строгих заключений об устойчивости. Единственная попытка строгого решения принадлежала Пуанкаре, который рассматривал устойчивость для случая систем дифференциальных уравнений второго и отчасти третьего порядков.

А. М. Ляпунов дал математически строгое общее определение устойчивости движения по отношению к некоторым данным непрерывным функциям Q_s времени t, координат q_i и скоростей q_i' системы, обобщившее многочисленные определения устойчивости, существовавшие ранее. В частности, выбирая надлежащим образом функции Q_s, в ляпуновское определение устойчивости можно включить определение орбитальной устойчивости, исследовавшейся в первом приближении Н. Е. Жуковским. Для невозмущенного движения функции Q_s обращаются в некоторые известные функции F_s времени t. Решение вопроса об устойчивости Ляпунов приводит к исследованию дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{1.1}$$

которым удовлетворяют разности $x_s = Q_s - F_s$, причем предполагается, что в области

$$t \geqslant t_0, \quad \sum_{s=1}^{n} x_s^2 \leqslant H \qquad (H = \text{const} > 0) \tag{1.2}$$

функции $X_s(x_1, \ldots, x_n, t)$ являются голоморфными функциями величин $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами, представляющими собой известные ограниченные функции времени.

Каковы бы ни были функции Q_s, по отношению к которым исследуется вопрос об устойчивости, определение устойчивости Ляпунова в переменных x_s можно перефразировать следующим образом.

Определение 1. *Если при всяком произвольно задаваемом числе $A > 0$ $(A < H)$, как бы мало оно ни было, может быть выбрано такое положительное число λ, что при всяких возмущениях x_{s0}, удовлетворяющих условию*

$$\sum_{s=1}^{n} x_{s0}^2 \leqslant \lambda, \tag{1.3}$$

и при всяком $t \geqslant t_0$ выполняется неравенство

$$\sum_{s=1}^{n} x_s^2 < A, \tag{1.4}$$

то невозмущенное движение устойчиво; в противном случае оно неустойчиво.

Кроме того, примем следующее

Определение 2. *Если при выполнении условий* (1.3) *и* (1.4) *выполняется также условие*

$$\sum_{s=1}^{n} x_s^2 \to 0 \quad при \quad t \to \infty, \tag{1.5}$$

то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Ляпунов в своем труде предложил два метода решения задач устойчивости.

К первому методу *) относятся все те способы решения, которые приводят к непосредственному исследованию возмущенного движения и в основании которых поэтому лежит разыскание общих или частных решений дифференциальных уравнений (1.1). Эти решения приходится, вообще говоря, искать под видом бесконечных рядов по целым положительным степеням произвольных постоянных или рядов другого характера.

Второй метод основывается на принципах, не зависящих от разыскания каких-либо решений уравнений возмущенного движения: он состоит в построении некоторых непрерывных однозначных функций $V(x, t)$ переменных x_s и времени t, обращающихся в нуль при $x_s = 0$ и удовлетворяющих определенным условиям. По признанию Ляпунова, на этот метод его натолкнуло изучение работы А. Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» (1881—1885; русский перевод: М.—Л., 1947). Основания второго метода выражены в данных Ляпуновым следующих четырех теоремах.

I. Теорема об устойчивости. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию V, производная которой V' в силу этих уравнений была бы или знакопостоянной функцией противоположного знака с V или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.*

II. Теорема об асимптотической устойчивости. *Если функция V, удовлетворяя условиям теоремы об устойчивости,*

---

*) Первому методу Ляпунова в настоящем сборнике посвящен обзор Н. П. Еругина (см. стр. 67—86).

допускает бесконечно малый высший предел, а производная ее V' представляет знакоопределенную функцию, то всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, будет приближаться к нему асимптотически.

III. Первая теорема о неустойчивости. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти функцию V, которая обладала бы в силу этих уравнений знакоопределенной производной V', притом допускала бы бесконечно малый высший предел и была бы такова, что при всяком t, большем некоторого предела, надлежащим выбором величин x_s, численно насколько угодно малых, ее можно было бы сделать величиной одинакового знака с ее производной,— то невозмущенное движение неустойчиво.*

IV. Вторая теорема о неустойчивости. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти ограниченную функцию V, производная которой в силу этих уравнений приводилась бы к виду*

$$V' = \lambda V + W, \tag{1.6}$$

где λ — положительная постоянная, а W или тождественно равна нулю или представляет некоторую знакопостоянную функцию, и если в последнем случае функция V такова, что при всяком t, большем некоторого предела, надлежащим выбором величин x_s, численно насколько угодно малых, ее можно сделать величиной одинакового знака с W, то невозмущенное движение неустойчиво.

Для краткости будем ссылаться на эти теоремы Ляпунова по их номерам (теоремы I—IV).

Из теоремы I, как следствие, можно получить теорему Рауса, а также теорему Лагранжа.

Отметим, как подчеркнул Н. Г. Четаев, что теорему Ляпунова об устойчивости можно рассматривать в механике как принцип отбора движений, устойчивых при возмущении начальных данных.

Пользуясь своим вторым методом, А. М. Ляпунов решил задачу об устойчивости по первому приближению, независимо от членов выше первого порядка в функциях X_s; в решении этой задачи он видел свое главное достижение. Случаи, когда первое приближение не решает вопроса об устойчивости, названы Ляпуновым критическими. В некоторых из критических случаев установившихся движений, а именно, в случаях одного нулевого корня, пары чисто мнимых корней и двух нулевых корней характеристического уравнения, а также в некоторых случаях периодических движений Ляпунов дал решение задачи об устойчивости. В замечательной работе Ляпунова общая теория дифференциальных уравнений получила существенное развитие.

Ляпунов интересовался также вопросом об устойчивости движения жидкости. В своей магистерской диссертации (1884; Собр. соч., т. 3, 1959) он исследовал важный для космогонии вопрос об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости, теоретически найденных К. Маклореном и К. Г. Я. Якоби. К этому вопросу он снова вернулся в 1908 г. Исследованиями Ляпунова было выяснено, что́ следует понимать под устойчивостью формы равновесия жидкости и как решать эту задачу об устойчивости с помощью интеграла энергии. Ляпунов дал строгое определение устойчивости формы равновесия жидкости и установил теорему, сводящую вопрос об устойчивости к решению задачи минимума некоторого функционала.

Надо, однако, сказать, что работы Ляпунова опередили свое время. При жизни у него почти не было продолжателей в области теории устойчивости. И лишь после Великой Октябрьской социалистической революции, когда в ходе социалистического строительства в нашей стране началось бурное развитие науки и техники и выросли новые кадры ученых, появились многочисленные продолжатели дела Ляпунова, идейные наследники и ученики. Его «Общая задача об устойчивости движения» стала настольной книгой специалистов, на которой воспитывались и росли советские ученые, обогатившие теорию устойчивости движения новыми важными результатами и создавшие эффективные методы решения прикладных задач.

В начале тридцатых годов возникла Казанская школа механиков, в трудах которых особенно большое развитие получил второй метод Ляпунова. Затем в Москве, Ленинграде, Киеве, а позднее в Свердловске, Алма-Ате, Горьком, Одессе, Минске и многих других городах возникли и стали интенсивно работать группы специалистов в области теории устойчивости движения. Особенно интенсивное развитие теории устойчивости наступило в послевоенные годы, когда проблемой устойчивости заинтересовались многие математики и механики.

Советская научная литература по устойчивости чрезвычайно обширна и весьма богата результатами как в области развития теории, так и в области ее практических приложений (см. «А. М. Ляпунов. Библиография». Составила А. М. Лукомская, под редакцией В. И. Смирнова, М.—Л., 1953). Разработка идей Ляпунова ведется по многим направлениям. Здесь надо отметить развитие и применение первого и, особенно, второго методов Ляпунова, установление новых теорем, расширяющих и углубляющих эти методы; анализ существования функций Ляпунова и их эффективного построения; исследования устойчивости по первому приближению и в критических случаях, а также при постоянно действующих возмущениях; исследования устойчивости неустановившихся и периодических движений, а также устойчивости на конечном интервале времени; развитие теории приводимых и правильных систем, а также качественной теории дифференциальных уравнений; распространение методов Ляпунова на механические системы, описываемые аппаратом, отличным от обыкновенных дифференциальных уравнений (в особенности на сплошные среды), и многие другие. В последние годы выяснилось, что метод функций Ляпунова можно с успехом применять и в получении оценок приближенных интегрирований, и в теории оптимального управления (см. обзор Н. Н. Красовского в настоящем сборнике, стр. 179—243), и в теории нелинейных колебаний и во многих других разделах науки. По теории устойчивости движения опубликован ряд прекрасных монографий.

Вслед за советскими учеными теорией устойчивости движения по Ляпунову и ее приложениями стали заниматься и зарубежные ученые; особенно большой размах эти исследования приняли в Чехословакии, США, Англии, Румынии, ГДР, Японии и некоторых других странах (см. в этой связи обзорный труд Л. Чезари «Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений», 1959; русский перевод: М., 1964).

Цель настоящего очерка — дать обзор некоторых основных направлений в развитии и применении советскими учеными метода функций Ляпунова в теории устойчивости движения. Этот обзор ни в какой мере не претендует на полноту в охвате всей обширной литературы по методу функций Ляпунова, в связи с чем результаты многих авторов не нашли отражения или упоминания в очерке или освещены недостаточно полно. Так как обзор посвящен методу, а не задачам конкретного вида, то основной упор сделан на математические аспекты вопроса; почти совершенно не освещены результаты многочисленных работ по приложению теории устойчивости к решению прикладных задач механики и техники. Автор надеется, что такая неполнота его очерка в известной мере оправдывается наличием ряда обстоятельных обзоров по вопросам устойчивости в сборниках «Механика в СССР за 15 лет», «Механика в СССР за 30 лет», «Математика в СССР за 30 лет», «Математика в СССР за 40 лет» и в ряде обзорных докладов, опубликованных в «Трудах» I и II Всесоюзных съездов по механике и в «Трудах» международных конгрессов и всесоюзных конференций по автоматическому регулированию. Ряд этих обзоров был использован и при написании настоящего очерка, что в дальнейшем специально не отмечается.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Н. Н. Красовскому и П. А. Кузьмину за чтение рукописи очерка и ценные замечания.

§ 2. Сущность понятия устойчивости по Ляпунову

Работы А. М. Ляпунова по теории устойчивости нелегки для изучения, так как свои исследования он излагал в достаточно отвлеченной форме, за которой в значительной мере был скрыт физический аспект проблемы. Кроме того, проблеме устойчивости самой по себе присущи принципиальные трудности. В связи с этими обстоятельствами перед учеными, приступившими к изучению научного наследия Ляпунова и творческому развитию его идей и методов, стояли большие трудности и прежде всего в понимании сущности теории устойчивости по Ляпунову. Можно по-разному понимать эту теорию. Некоторые ученые, например, видели в ней лишь один из разделов качественной теории дифференциальных уравнений, далекий от практических приложений; другие рассматривали ее как раздел аналитической динамики, задача которого состоит не только в качественном изучении поведения интегральных кривых уравнений возмущенного движения, но и в разработке методов получения тех или иных количественных оценок, интересующих практику.

Одним из первых, кто понял большое теоретическое и прикладное значение теории устойчивости Ляпунова, был Н. Г. Четаев. В начале тридцатых годов он организовал в Казани семинар, на котором докладывались работы по устойчивости движения, аналитической механике и качественной теории дифференциальных уравнений. В работе семинара активное участие принимали М. Ш. Аминов, Г. В. Каменков, П. А. Кузьмин, И. Г. Малкин, К. П. Персидский и многие другие. Так образовалось ядро созданной Н. Г. Четаевым и ставшей впоследствии знаменитой Казанской школы устойчивости, особенно прославившейся развитием второго метода Ляпунова. Развитие науки и техники показало, насколько важно было предвидеть необходимость исследований в новой области механики, значение которой было тогда неясным, организовать начало этих исследований и привлечь к ним молодежь.

В настоящее время общепризнанным является следующее толкование понятия устойчивости по Ляпунову: «В определении устойчивости Ляпунов использовал понятие числа, а не бесконечно малой величины. Поэтому существо понятия устойчивости по Ляпунову лежит не столько в характере изменения величин $|Q_s - F_s|$ при стремлении возмущений ε_j, ε_j' к нулю *), сколько в *оценках численных величин* возмущений при заданных численных оценках разностей $|Q_s - F_s|$ для устойчивого по отношению к функциям Q_s невозмущенного движения» (Н. Г. Четаев, примечание в книге А. М. Ляпунова «Общая задача....». М.—Л., 1950, стр. 464).

Эта концепция позволяет с успехом применять ляпуновскую теорию устойчивости для решения многообразных прикладных задач. Такая возможность была отмечена Четаевым еще в начале тридцатых годов в его лекциях по устойчивости самолета (в этой связи см. Н. Г. Четаев, 1930, а также Е. П. Гроссман, 1935). Для прикладных задач имеет значение не только (и не столько) факт существования числа $\lambda > 0$ по заданному числу $A > 0$, удовлетворяющих определению 1 устойчивости по Ляпунову, но и оценка этих чисел и проверка пригодности оценок в конкретных условиях задачи. Поэтому основными следует рассматривать те методы решения задач устойчивости, которые дают возможность получения указанных оценок. В этом смысле особенно эффективным оказывается второй метод Ляпунова.

Ляпунов не интересовался вопросом, сколь велико может быть значение λ при заданном A, хотя в доказательстве своей теоремы об устойчивости он дал практически полезный способ построения λ для определенного, ограниченного сверху числа A с помощью функций V и W, фигурирующих в доказательстве теоремы I.

В определении 1 устойчивости предполагается неограниченное изменение времени t и отсутствие возмущающих сил. В развитых Ляпуновым методах исследования устойчивости эти ограничения в значительной степени могут быть сняты. Ряд новых задач устойчивости потребовал некоторых дополнений и уточнений определения Ляпунова, многие из которых будут указаны ниже. В частности, для задач асимптотической устойчивости оказалось полезным введение понятия области притяжения и следующее уточнение определения 2.

Определение 3. *Невозмущенное движение $x = 0$ устойчиво асимптотически и область G пространства $\{x_s\}$ лежит в области притяжения точки $x = 0$, если наряду с выполнением условий определения 1 выполняются условия*

$$\lim x(x_0, t_0, t) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty \tag{2.1}$$

и

$$x(x_0, t_0, t) \in \Gamma \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0 \tag{2.2}$$

для всех начальных данных $x_0 \in G$. Здесь Γ — некоторая определенная конкретными условиями задачи наперед заданная область.

Если в изучаемой конкретной системе начальные возмущения $x_s(t_0)$ могут оказаться очень большими, то оказывается полезным

Определение 4. *Невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым в целом, если это движение устойчиво и если условие (2.1) выполняется для любых начальных возмущений $x_s(t_0)$, как бы велики они ни были.*

Сказанное выше об оценке результата с точки зрения пригодности решения при определенных конкретных условиях задачи показывает, что

*) Величины ε_j, ε_j' эквивалентны величинам x_s.

принятая во многих работах классификация устойчивости на «локальную устойчивость», «устойчивость в большом», «устойчивость в целом» и т. д. имеет условный смысл. Эти задачи следует рассматривать как конкретизацию для того или иного класса задач общей проблемы устойчивости (Н. Н. Красовский, 1959).

§ 3. Постулат устойчивости

В тридцатых годах Н. Г. Четаев (1932, 1936) установил новый естественнонаучный принцип — постулат устойчивости. Проблемы устойчивости он рассматривал в тесной связи с принципами механики и физики вообще, считая, что «устойчивость, явление принципиально общее, как-то должна... проявляться в основных законах природы». Глубокие корни того интересного факта, что, как он подметил, классические законы физики обладают известного рода устойчивостью, лежат, по мнению Четаева, в способе, каким эти законы были найдены.

Приведем в этой связи несколько выдержек из статьи Н. Г. Четаева (1936). «К объяснению какого-либо механического явления природы сначала подходят с определенными гипотезами о коренных движущих силах, что позволяет для переменных x_s изучаемой материальной системы писать некоторые дифференциальные уравнения движения. В том случае, когда решения этих дифференциальных уравнений кладут значения изучаемых функций Φ_k вблизи их опытных данных (в пределах ошибок эксперимента), гипотезу принимают за закон природы, по крайней мере до тех пор, пока не обнаружатся в опыте новые и несовместимые с принятой гипотезой факты...

Но когда отклонения теории от эксперимента могут быть незначительны?

Всякий раз, когда мы подходим к объяснению тех или иных явлений природы, мы не должны забывать, что в действительности никакое явление не представляется в чистом виде. Сколь бы точно ни были определены действующие на систему силы, всегда будут существовать неучтенными незначительные возмущения. Эти последние, сколь бы малы они ни были, влияют на движение материальной системы и дают в эксперименте наблюдаемым функциям не теоретические значения Φ_k, а некоторые иные — F_k.

Согласно.... определению устойчивых и неустойчивых движений, в действительности общий характер будут сохранять, по крайней мере по отношению к функциям Φ_k, только устойчивые по отношению к Φ_k теоретические, невозмущенные движения. Последнее обстоятельство отнюдь не означает, что все движения, определенные принятыми законами, являются устойчивыми при любых малых возмущающих силах и произвольно малых возмущениях начальных данных. Оно означает, что законы эти по основному требованию малых отклонений от опытных данных сами по себе не могут опираться ни на что иное, как на движения, устойчивые в той или иной мере по отношению к наблюдаемым функциям Φ_k».

Это предложение, являющееся следствием определения устойчивых невозмущенных движений и требования малых отклонений между теорией и экспериментом и относящееся более к структуре нашего научного знания, было названо Четаевым постулатом устойчивости. Применение постулата устойчивости приводит к важным результатам. Рассматривая консервативную голономную систему, Четаев нашел, что для устойчивости невозмущенного неустановившегося движения при возмущении начальных данных необходимо, чтобы все характеристические числа решений уравнений в вариациях были нулями. Это приводит к уравнению

$$L = \sum_{i,\,j} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial V}{\partial q_j}\right) = 0, \tag{3.1}$$

где $V(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби. Если допустить, далее, что на систему, помимо учитываемых в теории движущих сил с силовой функцией U_0, действуют также малые возмущающие силы с силовой функцией W, нам неизвестной, и вместо функции V ввести новую функцию ψ, определенную равенством

$$\psi = A \exp ikV,$$

где A — некоторая функция q_i, выбранная определенным образом, $k = \mathrm{const}$, то из равенства (3.1) можно получить условие устойчивости вида

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial q_j}\right) + 2k^2(U_0 + h)\,\psi = 0, \tag{3.2}$$

где h — постоянная интеграла энергии. При этом предполагается, что возмущающие силы имеют структуру, определенную равенством

$$W = \frac{1}{2k^2A}\sum_{i,\,j}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial A}{\partial q_j}\right). \tag{3.3}$$

Дифференциальное уравнение в частных производных (3.2) допускает однозначное конечное и непрерывное решение ψ, вообще говоря, не для любого значения h, а только для некоторых. А это означает, что устойчивость действительных движений системы может иметь место лишь для значений постоянной h интеграла энергии, совпадающих с собственными значениями постоянной h уравнения (3.2). Для свободной материальной точки при определенных условиях уравнение (3.2) принимает вид уравнения Шредингера

$$\Delta\psi + 2k^2m(U_0 + h)\,\psi = 0. \tag{3.4}$$

Таким образом, правило отбора устойчивых движений точки, вытекающее из постулата устойчивости, совпадает с правилами квантования.

Н. Г. Четаев проиллюстрировал (1936) постулат устойчивости на конкретных законах природы (закон Гука, законы Кеплера, второй закон термодинамики).

Позже (1960) Четаев подчеркивал, что в строгой установившейся теории реальные возмущающие силы не должны делать неустойчивыми хорошо наблюдаемые невозмущенные устойчивые равновесия или движения механической системы. В частности, Четаев пришел к заключению, что «малые диссипативные силы с полной диссипацией, всегда реально существующие в нашей природе, являются гарантийным силовым барьером, делающим пренебрежимыми влияния нелинейных возмущающих сил» на движения консервативных систем.

В 1945 г., исходя из инварианта Пуанкаре, Четаев доказал, что если невозмущенное движение консервативной системы устойчиво, то решения уравнений в вариациях имеют все характеристичные числа равными нулю, уравнения в вариациях являются при этом приводимыми и имеют знакоопределенный квадратичный интеграл. Эта фундаментáльная теорема Четаева обобщает теорему Лагранжа для равновесий и теорему Пуанкаре — Ляпунова для периодических движений.

Эта теорема позволяет сделать вывод, что для устойчивого невозмущенного движения консервативной голономной системы в соответствующих переменных бесконечно малые возмущенные движения системы аналогичны движениям вблизи устойчивого положения равновесия консервативной голономной системы. Тем самым выявляется колебательный, волновой характер движения механических систем вблизи их устойчивых ведущих движений. Отсюда следует, что задача Коши о развитии открытой Гамильтоном аналогии между динамикой консервативных механических систем и оптикой Гюйгенса тесно связана с некоторой задачей об устойчивости движения. Если существует аналогия между динамикой и математической теорией света Коши, то эту аналогию следует искать в возмущенных движениях вблизи устойчивых движений голономных консервативных систем.

Такая аналогия, действительно, была найдена Н. Г. Четаевым (1958, 1960), однако ее изложение выходит за рамки данного очерка.

§ 4. Теоремы Четаева о неустойчивости

Первый, после А. М. Ляпунова, существенный вклад в развитие метода функций Ляпунова был сделан Н. Г. Четаевым. Работая над знаменитой проблемой обращения теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия, Четаев (1930) сначала установил для автономных систем одну теорему о неустойчивости, в которой наряду с первой производной функции V рассматривается также вторая производная V''.

Модифицируя и обобщая эту теорему, Четаев (1934) установил теорему о неустойчивости с двумя функциями.

Теорема 1. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что*

1) *для некоторой допускающей бесконечно малый высший предел функции V существует область, где $VV' > 0$, и*

2) *для некоторых значений величин x_s, численно сколь угодно малых, в этой области ($VV' > 0$) возможно выделить область, в которой некоторая функция $W > 0$, на границе $W = 0$ значения полной производной по времени W' суть одного какого-либо определенного знака,*

то невозмущенное движение неустойчиво.

Следует при этом иметь в виду, что при решении вопросов о неустойчивости целесообразно рассматривать интервал изменения времени $[t_0, \infty]$ замкнутым, и существование некоторой области $V > 0$ понимается как ее непустота ни для какого t на рассматриваемом замкнутом интервале изменения времени (Н. Г. Четаев, 1938).

Следствие. *Если рассматриваемая в теореме область $VV' > 0$ ограничена поверхностью $V = 0$ и при этом $V' \geqslant 0$, то за функцию W теоремы возможно взять V.*

В дальнейшем Четаев (1946) сформулировал теорему о неустойчивости с одной функцией.

Теорема 2. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти функцию V, ограниченную в области $V > 0$, существующей при всяком $t \geqslant t_0$ и для сколь угодно малых по абсолютной величине значений переменных x_s, производная которой V' в силу этих уравнений была бы определенно-положительной в области $V > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Теоремы III и IV Ляпунова весьма просто получаются из теоремы 2 Четаева. Эта формулировка теоремы о неустойчивости получила наибольшее распространение; впоследствии было выяснено (Н. Н. Красовский, 1959), что ее, как и теорему IV Ляпунова, можно рассматривать как общий универсальный критерий неустойчивости.

В основе теорем 1—2 лежит простая мысль о том, что для того, чтобы доказать неустойчивость невозмущенного движения, достаточно обнаружить всего одну траекторию, выходящую за заданную область (1.4) при сколь угодно малых x_{s0}.

Теоремы Четаева о неустойчивости сыграли большую роль в успешном решении ряда проблем, в частности, при решении задачи об устойчивости в критических случаях, а также при решении конкретных механических задач. Пользуясь своими теоремами, Четаев дал решение проблемы обращения теоремы Лагранжа.

Под обращением теоремы Лагранжа понимается доказательство неустойчивости положения равновесия консервативной системы, если для него силовая функция U не имеет максимума. Эта задача до исследований Четаева была решена Ляпуновым лишь для следующих двух частных случаев: 1) в положении равновесия U имеет изолированный минимум, и это обнаруживается из рассмотрения совокупности членов наинизшего порядка в разложении этой функции по степеням приращения координат; 2) отсутствие максимума силовой функции обнаруживается по членам второго порядка в разложении U в указанный ряд. П. Пенлеве показал на примере, что ставить задачу обращения теоремы Лагранжа имеет смысл лишь для изолированных положений равновесия.

Первое решение задачи обращения теоремы Лагранжа было дано Четаевым (1930) с помощью его теоремы о неустойчивости с V''. Предположив, что функция U голоморфна и не имеет максимума в положении равновесия, взяв функцию $V = {}^1/_2 U^2$ и опираясь на теорию характеристик Кронекера, он показал, что в области C, где $V' > 0$, функция V'' удовлетворяет условию 2° теоремы, что и доказывает неустойчивость положения равновесия.

Сложность этого решения побудила автора искать более простое решение задачи. Используя свою теорему 1, он дал простое доказательство обращения теоремы Лагранжа для случая, когда силовая функция $U = U_m$ есть однородная форма степени m (1934), а также для случая, когда силовая функция $U = U_m + U_{m+1} + \ldots$ есть целая, начинающаяся с членов m-го порядка, если в рассматриваемой области знак выражений U и $mU_m + (m+1)\, U_{m+1} + \ldots$ определяется наинизшей формой U_m и наинизшая форма U_m степени m для численно сколь угодно малых значений переменных может принимать положительные значения (1938). В 1938 г. Четаеву удалось дать также новое по сравнению с работой 1930 г. доказательство обращения теоремы Лагранжа для общего случая, когда силовая функция U является аналитической функцией и не имеет максимума в рассматриваемом изолированном положении равновесия. Заменяя систему обыкновенных дифференциальных уравнений возмущенного движения одним дифференциальным уравнением в частных производных Гамильтона — Якоби и используя известную теорему Якоби, автор показал, что при указанных условиях полный интеграл

$$W(q_1, \ldots, q_n, h, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$$

уравнения Гамильтона — Якоби удовлетворяет условиям теоремы о неустойчивости, что и доказывает обращение теоремы Лагранжа для наиболее широкого класса случаев.

Наконец, Н. Г. Четаев (1952) дал элементарные доказательства обращения теоремы Лагранжа для ряда других частных случаев. Приведем наиболее общий среди них. Пусть

1) для численно сколь угодно малых значений q_s существует область C, в которой $U>0$;

2) существуют некоторые непрерывные в C вместе с частными производными первого порядка функции $f_s(q_1, \ldots, q_n)$, уничтожающиеся, когда все переменные равны нулю, причем все главные диагональные миноры функционального определителя

$$\left\| \frac{\partial f_s}{\partial q_r} + \frac{\partial f_r}{\partial q_s} \right\| \qquad (s, r = 1, \ldots, n)$$

ограничены снизу положительными числами в области C;

3) функция $\sum\limits_s \partial U/\partial q_s f_s$ определенно-положительна в области C.

В этом случае положение равновесия неустойчиво.

Недавно В. Т. Койтер (1965) показал, что в случае, когда потенциальная энергия системы не имеет минимума, причем ее вторая вариация постоянно-положительна (с одним равным нулю коэффициентом устойчивости), можно ввести преобразование координат так, что будут выполнены указанные требования 1° — 3° Четаева.

§ 5. Теоремы существования функций Ляпунова

Важным для обоснования универсальности метода функций Ляпунова является вопрос об обратимости основных теорем, лежащих в основе этого метода. Действительно, если вторым методом Ляпунова пользоваться как основным при решении задач устойчивости, то должна быть уверенность, что соответствующие функции в самом деле существуют. Сам А. М. Ляпунов не рассматривал вопроса о существовании в общем случае функций, удовлетворяющих его основным теоремам. Этот вопрос впервые был поставлен Н. Г. Четаевым перед участниками его семинара по устойчивости в Казани и к настоящему времени разрешен трудами ряда советских и иностранных ученых. Первой работой в этой области была статья И. Г. Малкина (1930), в которой рассматривались автономные системы второго порядка. Было показано, что для устойчивого установившегося невозмущенного движения может не существовать знакоопределенной не зависящей от времени функции, производная которой в силу уравнений возмущенного движения была бы знакопостоянной противоположного знака; однако можно найти такую функцию, зависящую явно от времени.

Обратимость теоремы I Ляпунова для общего случая была установлена К. П. Персидским (1938). Он доказал, что если невозмущенное движение устойчиво, то всегда существует знакоопределенная функция $V(x, t)$, производная которой V' в силу уравнений возмущенного движения является знакопостоянной функцией противоположного знака с V или тождественно равной нулю. Это доказательство дано в предположении, что правые части уравнений (1.1) — функции $X_s(x_1, \ldots, x_n, t)$ — определены и непрерывны в области (1.2) и имеют в этой области непрерывные частные производные $\partial X_s/\partial x_r$ $(s, r = 1, \ldots, n)$. При этом оказывается, что функция $V(x, t)$ существует и непрерывна в области

$$\sum_s x_s^2 < H_0 < H \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{5.1}$$

и имеет в этой области непрерывные частные производные.

Однако в общем случае здесь не удается доказать существования функции $V(x, t)$, имеющей равномерно ограниченные в области (5.1) частные производные $\partial V/\partial x_r$. В случае периодических функкий X_s (или функций X_s, не зависящих явно от времени t) нельзя также доказать существование периодической функции V (или функции V, не зависящей явно от t).

Вопросы существования функции $V(x, t)$, удовлетворяющей условиям теоремы II Ляпунова, рассматривались многими авторами. И. Г. Малкин (1931) показал обратимость этой теоремы для систем второго порядка с постоянными коэффициентами, а также установил (1935) достаточные условия существования функции Ляпунова для систем линейных уравнений с переменными коэффициентами. К. П. Персидский (1937) показал, что эти условия являются также и необходимыми. При этом предполагалось выполнение более жесткого требования, чем асимптотическая устойчивость, а именно, выполнение неравенства

$$|x_{sj}(t, t_0)| < Be^{-\alpha(t-t_0)}, \tag{5.2}$$

где B и α — некоторые не зависящие от t_0 положительные постоянные.

Х. Массера (Ann. Math., 1949, 50 : 3) подверг детальному анализу теоремы I и II Ляпунова. Он доказал существование непрерывно дифференцируемой функции $V(x, t)$ в окрестности асимптотически устойчивого невозмущенного движения в случае периодических по времени или не зависящих от времени непрерывно дифференцируемых функций X_s в правых частях уравнений (1.1). Для случая установившихся движений Е. А. Барбашин (1950) доказал существование функции $V(x)$, имеющей непрерывные частные производные до m-го порядка включительно, при условии, что функции $X_s(x)$ также имеют непрерывные частные производные до m-го порядка включительно ($m \geqslant 1$). И. Г. Малкин (1954) дал необходимые и достаточные условия существования непрерывно дифференцируемой функции $V(x, t)$ при непрерывно дифференцируемых функциях $X_s(x, t)$. Е. А. Барбашин и Н. Н. Красовский (1952, 1954) указали условия существования функции $V(x, t)$ во всем фазовом пространстве в случае устойчивости в целом (асимптотическая устойчивость решения $x = 0$, когда область притяжения G совпадает со всем пространством). Наконец, Я. Курцвейль (Чехосл. матем. ж., 1956, 6 : 2 и 4) и Х. Массера (Ann. Math., 1956, 64 : 1; русский перевод в сб. перев. «Математика», 1957, 1 : 4) доказали существование сколь угодно гладких функций $V(x, t)$ в предположении лишь непрерывности функций $X_s(x, t)$.

Следует отметить, что из доказательства теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости следует, как это показал И. Г. Малкин (1954), что при условиях этой теоремы имеет место равномерная устойчивость по времени t_0 и координатам x_0 начальных возмущений в следующем смысле.

Определение 5. *Решение $x = 0$ уравнений (1.1) называется асимптотически устойчивым равномерно по времени t_0 и координатам начальных возмущений x_0 из области G, если решение $x = 0$ устойчиво по Ляпунову и если для любого числа $\eta > 0$ можно указать такое число $T(\eta)$, что выполняется неравенство*

$$\sum_s x_s^2(x_0, t_0, t) < \eta \quad \textit{при} \quad t \geqslant t_0 + T(\eta).$$

Оказалось, что равномерная асимптотическая устойчивость является не только необходимым, но и достаточным условием существования функций Ляпунова (Н. Н. Красовский, 1959).

Вопросами существования функций Ляпунова занимался также В. И. Зубов (1954—1955, 1957). В частности, ему удалось дать уравнение границы области асимптотической устойчивости и необходимое и достаточное условие устойчивости в целом.

Вопросы существования функций $V(x, t)$, удовлетворяющих условиям теорем III и IV Ляпунова, решены Н. Н. Красовским (1954, 1956, 1959). Выяснилось, что теорема III обратима не всегда, а теорема IV всегда обратима. Именно, было доказано, что функция $V(x, t)$ из теоремы III существует тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: 1) невозмущенное движение $x = 0$ неустойчиво; 2) существует такое число $\varepsilon > 0$,что, каково бы ни было число $\eta < \varepsilon$, можно указать такое число $T(\eta) > 0$, что $x(t^*) > \varepsilon$ в некоторый момент времени $|t^* - t_0| < T$, если только $\varepsilon > x(t_0) \geqslant \eta$. Здесь $x = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Функция $V(x, t)$ из теоремы IV существует во всех случаях неустойчивости.

Исследование вопроса о существовании функции $V(x, t)$, удовлетворяющей условиям теоремы 2 Четаева о неустойчивости, проведено Н. Н. Красовским и И. Вркочем. Обращение теоремы Четаева было доказано сначала Красовским (1954) для уравнений (1.1), правые части которых не зависят явно от времени, а для общего случая установлено Вркочем (Чехосл. матем. ж., 1955, 5 : 4) и Красовским (1956, 1959).

Основной вывод из результатов весьма большого числа исследований проблемы обращения основных теорем второго метода Ляпунова, из которых здесь упомянута лишь небольшая часть работ, сводится к следующему.

Характер поведения возмущенных движений, определенный той или иной функцией V из классических теорем I, II, IV Ляпунова и теоремы 2 Четаева, лежащих в основе метода функций Ляпунова, является не только необходимым, но и достаточным условием существования такой функции. При этом выяснилось, что свойства гладкости функций V могут быть намного выше, чем гладкость правых частей уравнений возмущенного движения (1.1) (Н. Н. Красовский, 1959, 1966).

Несомненно, решение проблемы существования функций Ляпунова связано с успехами качественной теории дифференциальных уравнений. В развитии последней большую роль сыграли работы В. В. Степанова и В. В. Немыцкого (1949) и их многочисленных учеников.

В работах Н. П. Еругина (1952, 1956) и его учеников (В. А. Плисса, А. П. Тузова, В. И. Зубова) разработан метод исследования устойчивости движения комбинированием метода функций Ляпунова с общими качественными методами дифференциальных уравнений. Этот метод с успехом применен для доказательства существования периодических, ограниченных и почти-периодических решений, а также для исследования устойчивости движения в целом (В. А. Плисс, 1953, 1958, 1961, 1964).

Следует отметить, что положительное решение вопроса о существовании функций Ляпунова не только обосновало универсальность второго метода Ляпунова, но и позволило развить теорию устойчивости движений по первому приближению, при постоянно действующих возмущениях, при вариациях параметров, при наличии запаздываний и т. п. Это объясняется тем, то наличие функций Ляпунова обычно позволяет доказать сохранение соответствующих свойств при малых изменениях правых частей уравнений (1.1).

Гладкость функций V имеет значение в задачах устойчивости при возмущающих силах, где требуются вторые частные производные функции V для обоснования сохранения устойчивости при периодических возмущающих силах высокой частоты (В. Е. Гермаидзе и Н. Н. Красовский, 1957).

К сожалению, предложенные доказательства обращения теорем метода функций Ляпунова в большинстве случаев являются достаточно сложными, использующими конструкции, содержащие интегралы от решений уравнений возмущенного движения. В связи с этим теоремы о существовании функций Ляпунова, как правило, мало полезны для эффективного построения функций Ляпунова в конкретных прикладных задачах. Вследствие этого задачу упрощения и большего конструктивизма доказательств теорем существования функций Ляпунова можно считать интересной и в дальнейшем.

§ 6. Некоторые обобщения и модификации основных теорем метода функций Ляпунова

При решении вопросов обращения основных теорем метода функций Ляпунова было выяснено, что при условиях теорем *I*, *II*, *IV* Ляпунова и теоремы 2 о неустойчивости Четаева наряду с доказываемым свойством устойчивости имеют место некоторые дополнительные свойства (равномерность асимптотической устойчивости и др.). В связи с этим возник вопрос о том, как эти дополнительные свойства связаны с тем или иным ограничением, налагаемым на соответствующую функцию Ляпунова. Выяснение этого вопроса приводит к разнообразным обобщениям и модификациям основных теорем метода функций Ляпунова. Предложенные многими авторами обобщения и модификации выясняют связь свойств функций Ляпунова со свойствами траекторий (ослабление равномерности и т. д.), уточняют оценки качества устойчивости, облегчают построение функций V для конкретных задач путем ослабления требований к этим функциям и т. п.

Еще сам А. М. Ляпунов в одной из своих работ (Матем. сб., 1893; Собр. соч., т. 2, 1956) отметил, что можно рассматривать более общую по сравнению с определением 1 задачу об устойчивости невозмущенного движения по отношению не ко всем, а только к части переменных $x_1, \ldots, x_n$, например, по отношению к величинам $x_1, \ldots, x_m$ $(m < n)$. Постановка этой задачи получается из предыдущей заменой условия (1.4) неравенством

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 < A. \tag{6.1}$$

Аналогично можно определить асимптотическую устойчивость по отношению к части переменных, заменяя в определении 2 условие (1.5) условием

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{6.2}$$

Назовем знакопостоянную функцию $V(x, t)$ знакоопределенной по отношению к части переменных $x_1, \ldots, x_m$ функцией, если можно указать такую не зависящую от t определенно-положительную функцию $W(x_1, \ldots, x_m)$, что выполняется одно из двух неравенств: $V - W \geqslant 0$ или $-V - W \geqslant 0$. Можно при этом показать, что если в теоремах I и II Ляпунова требования знакоопределенности функций V и V' и наличия у V бесконечно малого высшего предела заменить на те же требования по отношению к части переменных, то получим соответственно теорему об устойчивости и теорему об асимптотической устойчивости по отношению к части переменных (В. В. Румянцев, 1957).

В дальнейшем вопросы устойчивости по отношению к части переменных рассматривались В. И. Зубовым (1959), В. М. Матросовым (1963), К. Кордуняну и др.

К. П. Персидский (1946) показал, что если дополнительно к условиям теоремы I Ляпунова потребовать, чтобы функция $V(x, t)$ допускала бесконечно малый высший предел, то получим теорему о равномерной по времени t_0 устойчивости невозмущенного движения. Таким образом, вследствие существования у функции V бесконечно малого высшего предела, число λ в определении 1 оказывается зависящим лишь от числа A, но не от начального момента времени t_0. Теорема К. П. Персидского о равномерной устойчивости допускает обращение (Н. Н. Красовский, 1955, 1959; Я. Курцвейль, Чехосл. матем. ж., 1956, 6 : 2 и 4; Я. Курцвейль и И. Вркоч, там же, 1957, 7 : 2).

Н. Г. Четаев (1955) предложил следующую интересную модификацию теоремы II Ляпунова об асимптотической устойчивости, позволяющую в любой момент времени t определять область возможных значений переменных x_s.

Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция $V(x, t)$ — такая, что функция $V - \theta(t) W$ ($\theta(t_0) = 1$) является постоянно-положительной при определенно-положительной и не зависящей от времени функции W и при монотонно возрастающей до бесконечности вместе с ростом t функции $\theta(t)$, а полная производная по времени V' является постоянно-отрицательной или нулем, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а область возможных значений переменных x определяется неравенством $W \leqslant V_0/\theta(t)$ ($V_0 = V(x_0, t_0)$).

Идеи этой теоремы Четаева были распространены А. М. Табаровским (1958) на исследование равномерной асимптотической устойчивости в целом. Некоторое обобщение этих результатов дано С. К. Персидским (1961, 1964).

Как указывалось выше, требования теоремы II Ляпунова обеспечивают асимптотическую устойчивость, равномерную по начальному времени t_0 и по начальным координатам x_0. Н. Н. Красовский (1959) доказал, что если вместо требования знакоопределенности производной V' в теореме II Ляпунова наложить несколько более слабое ограничение, а именно:

1) $V' \leqslant 0$ в области H;

2) $\sup (V(x, t)$ в области H_0 при $t \in (0, \infty)) < \inf (V(x, t)$ на границе H_1 при $t \in (0, \infty))$, где области H_0, H_1, H связаны условиями $\overline{H}_0 \subset H_1$, $\overline{H}_1 \subset H$;

3) $\int\limits^{\infty} m_\eta(\tau)\, d\tau = -\infty$, где $m_\eta(\tau) = \sup V'$ в области $\eta \leqslant \|x\|$, $x \in H_1$, $t = \tau$, для всех достаточно малых $\eta > 0$,

то получим теорему об асимптотической устойчивости, равномерной по координатам x_0, но неравномерной по t_0, и устойчивости, равномерной по t_0. Здесь и далее $\|x\| = \sup(|x_s|)$ $(s = 1, \ldots, n)$. Эта теорема допускает обращение. Теоремы могут быть еще несколько модифицированы, охватывая и случай асимптотической устойчивости, когда устойчивость неравномерна по координатам x_0.

В случае линейных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\,x_j \qquad (i=1,\ldots,n), \tag{6.3}$$

где $p_{ij}(t)$ — непрерывные и ограниченные функции t, устойчивость всегда равномерна по координатам x_0 начальных возмущений. В этом случае модификация теоремы II Ляпунова формулируется следующим образом.

Для асимптотической устойчивости решений системы (6.3) необходимо и достаточно, чтобы существовала определенно-положительная квадратичная форма

$$V(x,t)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_i x_j,$$

производная которой

$$V'=\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t)\,x_i x_j \qquad \left(c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}p_{kj}+a_{jk}p_{ki})+a'_{ij}\right)$$

удовлетворяет неравенству $V'\leqslant\lambda(t)\,V$, причем

$$\int^{\infty}\lambda(t)\,dt=-\infty. \tag{6.4}$$

Отметим, что так как V и V' в рассматриваемом случае являются квадратичными формами, то в качестве величины $\lambda(t)$ можно выбрать наибольшее значение V' на поверхности $V(x,t)=1$, равное наибольшему корню уравнения

$$\| c_{ij}-\lambda a_{ij}\|=0. \tag{6.5}$$

Отсюда следует, что решения системы уравнений (6.3) асимптотически устойчивы, если наибольший корень уравнения (6.5) удовлетворяет условию (6.4) (Н. Н. Красовский, 1959; Б. С. Разумихин, 1957; А. Д. Горбунов, 1953).

Н. Н. Красовский (1959) рассмотрел вопрос о существовании функций Ляпунова, удовлетворяющих оценкам, характерным для квадратичных форм. Он доказал, что если решения $x(x_0, t_0, t)$ системы уравнений (1.1) удовлетворяют условиям, аналогичным (5.2), то в области $\|x\|<H_0$ существует функция $V(x,t)$, удовлетворяющая оценкам

$$c_1\|x\|_2^2\leqslant V(x,t)\leqslant c_2\|x\|_2^2, \quad V'\leqslant -c_3\|x\|_2^2, \quad \left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|\leqslant c_4\|x\|_2, \tag{6.6}$$

где c_s — положительные постоянные, а $\|x\|_2=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}$.

Большое число исследований посвящено задачам об асимптотической устойчивости, где область начальных возмущений, для которых должно выполняться условие (2.1), нельзя считать малой. Такие задачи изучались в работах Н. П. Еругина (1950, 1952), А. И. Лурье (1951), И. Г. Малкина (1952), Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского (1952), А. М. Летова (1955), В. И. Зубова (1957), В. А. Плисса (1958), М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера (1963) и многих других. В частности, Е. А. Барбашиным и Н. Н. Красовским доказана следующая теорема об асимптотической устойчивости в целом.

Если можно указать функцию $V(x,t)$, которая была бы определенно-положительной и допускала бы высший предел в целом, а ее производная V' в силу уравнений возмущенного движения была бы функцией определенно-отрицательной при всех значениях x_s, то невозмущенное движение $x_s = 0$ асимптотически устойчиво в целом.

Будем говорить, что функция $V(x, t)$ является определенно-положительной и допускает высший предел в целом, если можно указать такие две непрерывные функции $w(x)$ и $W(x)$, что при всех значениях x_s выполняются неравенства

$$w(x) \leqslant V(x, t) \leqslant W(x),$$

причем функция $w(x)$ определенно-положительна и, кроме того,

$$\lim_{x \to \infty} w(x) = \infty, \qquad W(0) = 0.$$

Отметим, что требование от функции V свойства

$$V(x_1, \ldots, x_n) \to \infty \quad \text{при} \quad \sum x_s^2 \to \infty \tag{6.7}$$

для устойчивости в целом было впервые высказано Н. П. Еругиным (1952), показавшим так же, как вопрос об устойчивости в целом решается вторым методом, когда нет единственности или если функция Ляпунова не обладает свойством (6.7).

В приложениях (в частности, при исследовании устойчивости в целом нелинейных систем) иногда удается построить определенно-положительную функцию V, производная которой V' является лишь отрицательной знакопостоянной функцией, но не определенно-отрицательной; в то же время возникают серьезные трудности при попытке построить функцию V с определенно-отрицательной производной. В подобных случаях весьма полезна следующая теорема, установленная сначала Е. А. Барбашиным и Н. Н. Красовским (1952), а также А. П. Тузовым (1955), для уравнений (1.1), правые части X_s которых не зависят от t, а затем распространенная Н. Н. Красовским (1959) на периодические системы.

Если уравнения возмущенного движения (1.1) таковы, что можно построить функцию $V(x, t)$, периодическую по времени t с периодом ϑ или не зависящую явно от времени, которая является определенно-положительной, допускает бесконечно малый высший предел в области

$$\|x\| < H, \qquad -\infty < t < +\infty \qquad (H = \text{const или } H = \infty) \tag{6.8}$$

и удовлетворяет неравенству

$$\sup(V \text{ в области } \|x\| \leqslant H_0,\ 0 < t < \vartheta) < \inf(V \text{ при } \|x\| = H_1)$$

$(H_0 < H_1 < H)$, причем ее производная V' удовлетворяет условиям: 1) $V' \leqslant 0$ в области (6.8), 2) V' может быть равна нулю лишь в точках множества M, не содержащего целиком полутраекторий системы (1.1) $x(x_0, t_0, t)$ $(0 < t < \infty)$ (за исключением $x = 0$), то решение $x = 0$ асимптотически устойчиво и область $\|x\| \leqslant H_0$ лежит в области притяжения точки $x = 0$.

Эту теорему обобщил Ж. Ла-Салль (см. Ж. Ла-Салль и С. Лефшец, Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, 1961; русский перевод: М., 1964).

Как показал на примере В. М. Матросов (1962), теорема Барбашина — Красовского в приведенной форме не может быть распространена на непериодические системы (1.1). Он предложил следующую модификацию этой теоремы для уравнений (1.1) с ограниченными правыми частями, развивая идею Н. Г. Четаева об использовании двух и более функций Ляпунова, а также производных от V порядка выше первого.

Пусть существуют функции $V_1(x, t)$, $V_2(x, t)$, обладающие в (1.2) следующими свойствами: 1) функция $V_1(x, t)$ определенно-положительна и допускает бесконечно малый высший предел; 2) производная $V_1'(x, t) \leqslant \leqslant \varphi(t) V^*(x)$, где $V^*(x) \leqslant 0$, а $\varphi(t)$ — функция, положительная в среднем (соответственно положительное число); 3) функция $V_2(x, t)$ ограничена; 4) строго (соответственно определенно) $V_2'(x, t) \neq 0$ в множестве E ($V^* = 0$). Тогда невозмущенное движение $x = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво равномерно по x_0 (соответственно равномерно по x_0, t_0).

По определению, строго (определенно) $W'(x, t) \neq 0$ в множестве $E(V^* = 0)$, если для любой области A_α ($\alpha < \| x \| < A$) найдутся окрестность в A_α множества $A_\alpha \cap E(V^* = 0)$ и непрерывная функция $\xi(t)$ (положительное число ξ) такие, что при любом $t \geqslant 0$

$$\xi(t) > 0, \qquad \int_t^\infty \xi(\tau)\, d\tau = \infty$$

и в найденной окрестности $|W'(x, t)| \geqslant \xi$. Непрерывная неотрицательная функция $\varphi(t)$ называется положительной в среднем, если для любой бесконечной системы s замкнутых непересекающихся отрезков полуоси $(0, \infty)$ одинаковой положительной длины будем иметь

$$\int_s \varphi(t)\, dt = \infty.$$

Аналогичная теорема имеет место и для неравномерной асимптотической устойчивости, но там требование бесконечно малого высшего предела предъявляется не к основной функции V_1, а к вспомогательной — V_2. И. Я. Кац (1964) перенес эту теорему на систему со случайными параметрами, а В. М. Матросов (1966) распространил на задачу устойчивости множеств. Если в теореме В. М. Матросова положить, что $V^*(x)$ определенно-положительна, то надобность во вспомогательной функции V_2 отпадает, и приходим к признаку асимптотической устойчивости с одной функцией, обобщающему теорему II Ляпунова в двух направлениях: 1) снимается требование бесконечно малого высшего предела; 2) смягчается требование знакоопределенности V'. Такого рода обобщения критерия Ляпунова принадлежат, помимо названных ученых, В. П. Марачкову (1945), В. И. Зубову (1959) и Р. Рейсигу (ZAMM, 1960, 40: 1-3; русский перевод в сб. перев. «Механика», 1961, № 3).

Следует отметить, что первоначальная идея Н. Г. Четаева о введении двух функций получила развитие в работе П. А. Кузьмина (1954), установившего теоремы об условной устойчивости с двумя функциями, а также об устойчивости и асимптотической устойчивости для линейных систем с непрерывными и ограниченными коэффициентами, о поведении возмущенных движений которых во всей окрестности точки $x = 0$ можно судить по их свойствам в некоторой области этой окрестности. Так, П. А. Кузьмин установил следующую теорему.

Если уравнения возмущенного движения таковы, что для некоторой определенно-положительной функции V существует область $V' \leqslant 0$, в которой можно выделить n-мерную область $W \geqslant 0$, не пустую при численно сколь угодно малых x_s и при всех $t \geqslant t_0$, и такую, что на ее границе $W = 0$ всюду $W' \geqslant 0$, то невозмущенное движение устойчиво.

Критерий устойчивости с одной или несколькими функциями можно получить также на основе использования неравенств, которыми оцениваются функции или функционалы, а также на основе теории дифференциальных или интегральных неравенств. Применение различного рода неравенств, а также принципов неподвижной точки к проблемам устойчивости и качественной теории дифференциальных уравнений содержится в работах многих авторов (В. В. Румянцев, 1955; М. А. Красносельский и С. Г. Крейн, 1956; Е. А. Барбашин, 1961; Л. Ф. Рахматуллина, 1959; В. М. Миллионщиков, 1960; М. А. Красносельский и Я. Д. Мамедов, 1959; З. Б. Цалюк, 1960; М. А. Красносельский, 1962) *).

Так, установлена следующая теорема (В. В. Румянцев, 1955, 1960).

Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти функцию $W(x, t)$, производная по времени от которой в силу этих уравнений $W' \leqslant 0$, и существует такая определенно-положительная функция $V(y, t)$, что для всякого $t \geqslant t_0$ и всех значений переменных x_s в области их изменения $\sum\limits_s x_s^2 \leqslant H$ и соответствующих значений переменных y_i в области $\sum\limits_i y_i^2 \leqslant H_1$ имеет место неравенство

$$V(y, t) \leqslant W(x, t),$$

то невозмущенное движение устойчиво по отношению к y_i $(i = 1, \ldots, k)$.

Отметим, что переменные y_i представляют собой некоторые непрерывные ограниченные функции переменных x_s, t, уничтожающиеся, когда $x_s = 0$.

Следующий признак устойчивости относительно части переменных с несколькими функциями V_i доказан В. М. Матросовым (1965).

Пусть существуют функции $V_1(x, t), \ldots, V_k(x, t)$, обладающие в области $\Gamma(\|x\| < \infty, t \geqslant 0)$ следующими свойствами:

1) $V_1(x, t) \geqslant 0, \ldots, V_l(x, t) \geqslant 0 \quad (l \leqslant k)$,

$$|V_1(x, t)| + \ldots + |V_l(x, t)| \geqslant V^*(x_1, \ldots, x_m) \qquad (m \leqslant n),$$

где $V^*(x_1, \ldots, x_m)$ — определенно-положительна;

2) $V_s'(x, t) \leqslant f_s(V_1(x, t), \ldots, V_k(x, t), x_1, \ldots, x_m, t) \quad (s = 1, \ldots, k)$;

3) каждая функция $f_s(V_1, \ldots, V_k, x_1, \ldots, x_m, t)$ является неубывающей по $V_1, \ldots, V_{s-1}, V_{s+1}, \ldots, V_k$;

4) полуось $y = 0$ в силу системы

$$\frac{dy_s}{dt} = f_s(y_1, \ldots, y_k, \xi_1(t), \ldots, \xi_m(t), t) \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

квазиустойчива (соответственно асимптотически квазиустойчива) относительно $y_1, \ldots, y_l$ при функции $\varphi(A) = \inf\left[V^* \text{ при } \sum\limits_{s=1}^m x_s^2 \geqslant A^2\right]$ и при условиях $y_{s0} \geqslant 0$ $(s = 1, \ldots, l)$.

Тогда невозмущенное движение $x = 0$ устойчиво (соответственно асимптотически устойчиво) относительно части переменных $x_1, \ldots, x_m$.

Данное В. М. Матросовым определение квазиустойчивости обобщает соответствующие понятия, введенные К. П. Персидским (1951), Е. И. Дых-

*) См. также Ж. Ла-Салль и С. Лефшец, цит. соч.; З. Опяль, Ann. polon. math., 1960, 8:2; К. Кордуняну, An. ştiinţ. Univ. Iaşi, 1960, 6:1; В. Лакшмикантам, Michigan Math. J., 1962, 9:4, Proc. Amer. Math. Soc., 1963, 14:3, Proc. Cambridge Phil. Soc., 1963, 59:2.

маном (1950) и В. И. Зубовым (1959) с учетом одного замечания Н. П. Еругина (1952) и определения В. В. Румянцева (1957).

Ряд других модификаций теорем Ляпунова предложили также К. П. Персидский (1931), X. И. Ибрашев (1947), И. Г. Малкин (1954), Н. Н. Красовский (1956), В. И. Зубов (1959), Г. И. Мельников (1956) и многие другие.

Теоремы III и IV Ляпунова и теоремы 1—2 Четаева о неустойчивости также обобщались и модифицировались многими авторами. К. П. Персидский (1946—1947) ввел понятия сектора и полусектора и предложил следующую теорему о неустойчивости.

Пусть существует сектор Δ и функция $V(x, t)$, обладающая в нем следующими свойствами: 1) $V(x, t)$ ограничена; 2) $V(x, t)>0$ при $x\neq 0$; 3) $V'(x, t)\geqslant\eta(V(x, t), t)$, где $\eta(V, t)$ неотрицательная неубывающая по V функция, для которой $\int\limits_0^\infty \eta(\alpha, t)\,dt=\infty$ при любом $\alpha>0$. Тогда невозмущенное движение неустойчиво.

Интересные критерии неустойчивости предложил Н. П. Еругин (1952). Им сформулирована следующая общая теорема о неустойчивости.

Пусть найдена функция $V(x, t)$, удовлетворяющая следующим условиям: при сколь угодно малом $\varepsilon>0$ в области $|x|\leqslant\varepsilon$ существует такая точка x^0, что для движения, проходящего через эту точку в момент $t=t_0$, имеют место неравенства

1) $V(x^0, t_0)>0$,

2) $\int\limits_{t_0}^{t_1} V'\,dt\geqslant a(x^0)>0$ при $t_1>t_0$,

3) $|V|\leqslant L(H, x^0)$ при $t=t_1$ и $|x|\leqslant H$,

4) $L(H, x^0)\leqslant a(x^0)$.

Тогда невозмущенное движение $x=0$ неустойчиво.

Рассмотрены также возможные частные случаи; развиты применения к вопросам продолжимости решений, качественной теории дифференциальных уравнений, к вопросу существования ограниченных решений системы (1.1).

Теоремы о неустойчивости рассматривались также рядом других математиков, в частности О. А. Жаутыковым (1947), а также В. И. Зубовым (1959), X. Массера (1956) и др. Для периодических по времени или не зависящих от времени функций $X_s(x, t)$ в правых частях уравнений (1.1) Н. Н. Красовский (1956, 1959) получил следующее обобщение теоремы III Ляпунова. Если можно указать функцию $V(x, t)$, периодическую по времени t или не зависящую явно от времени, которая допускала бы бесконечно малый высший предел и притом была бы такова, что ее производная V' в силу уравнений (1.1) удовлетворяла бы следующим условиям:

1) $V'\geqslant 0$,

2) V' может быть равна нулю лишь в точках множества M, не содержащего целых полутраекторий $x(x_0, t_0, t)$ $(t_0\leqslant t<\infty)$, за исключением решения $x=0$,

и если при этом при каждом $t_0\geqslant 0$ можно указать такие точки, лежащие в произвольной окрестности точки $x=0$, что $V>0$, то движение $x=0$ неустойчиво.

В приведенной форме эта теорема не может быть распространена на общий случай неустановившихся движений. Однако возможно получить следующую модификацию теоремы (В. М. Матросов, 1962, 1965).

Пусть существуют сектор Δ и функции $V_1(x, t)$, $V_2(x, t)$, обладающие в Δ следующими свойствами:

1) $V_1(x, t)$ допускает бесконечно малый высший предел;

2) $V_1(x, t) > 0$ при $\{x, t\} \in \Delta$, $x \neq 0$;

3) $V_1'(x, t) \geqslant \varphi(t) V^*(x)$, где $V^*(x) \geqslant 0$ при $\sum_{s=1}^{n} x_s^2 \leqslant H$, а $\varphi(t)$ — функция, положительная в среднем;

4) $V_2(x, t)$ ограничена и строго $V_2'(x, t) \neq 0$ в множестве $E(V^* = 0) \cap [U\Delta(\tau)]$, $\tau \in [0, \infty]$.

Тогда невозмущенное движение неустойчиво.

Отсюда можно получить следствия, модифицирующие теоремы 1—2 Четаева и теорему Красовского о неустойчивости. Вопрос о неустойчивости рассматривался также С. К. Персидским (1961). Для модификации и обобщения теорем о неустойчивости оказалось возможным, как и в вопросах устойчивости, использование дифференциальных неравенств (В. М. Матросов, 1965).

Расширение области приложения теории устойчивости потребовало изучения систем, описываемых математическим аппаратом, отличным от обыкновенных дифференциальных уравнений в конечномерном пространстве — таких, как конечноразностные системы, счетные системы уравнений, уравнения с запаздываниями t, уравнения в частных производных и т. п. В некоторых случаях такие системы удается свести к исследованию «обыкновенных» уравнений в специально подобранном абстрактном функциональном пространстве.

Изучение задач устойчивости в абстрактных пространствах было начато К. П. Персидским (1936—1937, 1948, 1950) и М. Г. Крейном (1948) и в настоящее время продвинуто далеко вперед, включая доказательство теорем существования функций Ляпунова (см., например, работы В. И. Зубова, 1954, 1955, 1957; Н. Н. Красовского, 1956), что связано с успехами общей теории дифференциальных уравнений на базе функционального анализа. Для систем, описываемых функциональными уравнениями, важное значение имеет правильный учет начальных возмущений, возможных в реальных условиях, в связи с чем для постановки задачи устойчивости немаловажное значение имеет качественное исследование характера движений.

Однако эффективное приложение метода функций Ляпунова к задачам такого рода осуществлено пока лишь в некоторых случаях. Наиболее разработан он для систем с последействием, описываемых уравнениями вида

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t+\vartheta), \ldots, x_n(t+\vartheta), t) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{6.9}$$

где $X_i(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta), t)$ — функционалы, определенные на кусочно-непрерывных функциях $x_i(\vartheta)$ аргумента ϑ, меняющегося в пределах $-h \leqslant \vartheta \leqslant 0$ ($h > 0$ — постоянная). Частными случаями уравнений (6.9) являются уравнения с запаздываниями времени, когда $\vartheta = -h(t)$ и X_i — функция числового вектора-аргумента $x_1, \ldots, x_n$.

Определение 6. *Решение $x = 0$ уравнений (6.9) называется устойчивым, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что выполняется неравенство*

$$\| x(x_0(\vartheta_0), t_0, t) \| < \varepsilon \quad \textit{при} \quad t \geqslant t_0,$$

если только выполняется неравенство

$$\| x_0(\vartheta_0) \|^{(h)} = \sup(| x_i(\vartheta_0) |) \leqslant \delta \quad \textit{при} \quad -h \leqslant \vartheta_0 \leqslant 0.$$

Если, кроме того, выполняются условия

$$\lim \| x(x_0(\vartheta_0), t_0, t) \| = 0 \quad \textit{при} \quad t \to \infty,$$

$$\| x(x_0(\vartheta_0), t_0, t) \| \leqslant H_1 \quad \textit{при всех} \quad t \geqslant t_0 \, (H_1 = \mathrm{const})$$

для всех начальных кривых $x_0(\vartheta_0)$, *удовлетворяющих неравенству*

$$\| x_0(\vartheta_0) \|^{(h)} \leqslant H_0, \tag{6.10}$$

то решение $x = 0$ *уравнений* (6.9) *устойчиво асимптотически и область* (6.10) *лежит в области притяжения невозмущенного движения* (Н. Н. Красовский, 1959).

Теоремы метода функций Ляпунова можно перенести непосредственно без всяких изменений на уравнения (6.9). Такое перенесение этих теорем на уравнения с запаздываниями времени t было выполнено Л. Э. Эльсгольцем (1954), указавшим, однако, что формальное перенесение теорем Ляпунова на системы с запаздываниями имеет ограниченное значение, так как в большинстве случаев теоремы Ляпунова оказываются здесь необратимыми.

Если, однако, в качестве элемента траектории принять не вектор $\{x_i(x_0(\vartheta_0), t_0, t)\}$, а вектор-отрезок этой траектории $\{x_i(x_0(\vartheta_0), t_0, t+\vartheta)\}$ при $-h \leqslant \vartheta \leqslant 0$, который будем обозначать символом $x_i(x_0(\cdot), t_0, t, \cdot)$, и заменить функцию Ляпунова $V(x(\vartheta), t)$, определенную на векторе x, функционалом $V(x(\vartheta), t)$, определенным на вектор-функции $x(\vartheta)$, то, как показал Н. Н. Красовский (1959), основные определения и теоремы второго метода Ляпунова весьма естественно переносятся на функционалы V, причем теоремы оказываются обратимыми. Так, например, теорема, соответствующая теореме II Ляпунова, формулируется следующим образом.

Если уравнения с последействием (6.9) таковы, что возможно указать функционал $V(x(\vartheta), t)$, определенно-положительный в области $\| x(\vartheta) \| < H$, $t \geqslant 0$, допускающий бесконечно малый высший предел, такой, что величина

$$\left(\lim_{\Delta t \to +0} \sup \frac{\Delta V}{\Delta t} \right)_{(6.9)}$$

является определенно-отрицательной в силу уравнений (6.9), то решение $x = 0$ уравнений (6.9) асимптотически устойчиво. Если при этом выполняется условие

$$\inf (V \text{ при } \| x(\vartheta) \|^{(h)} = H_1) > \sup (V \text{ при } \| x(\vartheta) \|^{(h)} = H_0) \qquad (H_0 < H_1 < H),$$

то область начальных кривых $\| x_0(\vartheta_0) \|^{(h)} < H_0$ лежит в области притяжения точки $x = 0$.

Эта теорема обратима, причем, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, необходимым и достаточным условием существования такого функционала V является равномерность асимптотической устойчивости по начальным данным $x_0(\vartheta)$ и начальному моменту времени $t_0 \geqslant 0$.

Н. Н. Красовским (1956, 1959) доказана также теорема, обосновывающая применение функций Ляпунова для уравнений с последействием.

Если можно указать определенно-положительную функцию $V(x, t)$, допускающую бесконечно малый высший предел и удовлетворяющую неравенству

$$\inf (V \text{ при } \| x \| = H_1) > \sup (V(x, t) \text{ при } \| x \| \leqslant H_0) \qquad (H_0 < H_1 < H),$$

и если при этом правая производная вдоль траекторий системы (6.9) удовлетворяет неравенству

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{dt=+0} < -\varphi(\|x\|)$$

на непрерывных кривых $x(\vartheta)$,

$$V(x_i(\xi), \ldots, x_n(\xi), \xi) < f(V(x_1(t), \ldots, x_n(t), t)) \quad \text{при} \quad t-h<\xi<t,$$

где $f(r)$ — какая-нибудь непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству $f(r) > r$ при $r \neq 0$, $f(r'') - f(r') > 0$ при $r'' > r'$, то решение $x = 0$ уравнений (6.9) асимптотически устойчиво и начальные кривые лежат в области притяжения точки $x = 0$.

Аналогичная теорема принадлежит также Б. С. Разумихину (1956), установившему, кроме того, теорему об устойчивости с функцией $V(x, t)$ для уравнений с запаздыванием.

Развивая методы теории точечных отображений, Ю. И. Неймарк (1958) перенес на точечные отображения теоремы I и II Ляпунова, а также некоторые другие результаты теории устойчивости. Результаты теории точечных отображений могут быть истолкованы в терминах конечноразностных уравнений.

§ 7. Применение второго метода Ляпунова в проблемах устойчивости сплошных сред

Как отмечалось выше, актуальной проблемой теории устойчивости является создание строгих и эффективных методов исследования устойчивости движения систем с распределенными параметрами, в особенности сплошных сред. Эта проблема имеет огромное теоретическое и прикладное значение. В связи с этим весьма заманчивым представляется распространение методов Ляпунова вообще, и второго метода в частности, на системы с бесконечным числом степеней свободы. Этой проблеме посвящено большое число исследований, связанных большей частью с прикладными задачами. Мы рассмотрим здесь главным образом два направления исследований в этой области: применение прямого метода Ляпунова и распространение теорем Лагранжа и Рауса.

Одними из первых методом функций Ляпунова были решены задача Эйлера об устойчивости прямолинейной формы равновесия тонкого стержня постоянного сечения, находящегося под действием продольной постоянной нагрузки (Н. Г. Четаев, 1946) и задача об устойчивости круговой формы однородной гибкой нерастяжимой нити в отсутствие внешних сил (П. А. Кузьмин, 1948—1949). В обеих задачах введено счетное множество обобщенных координат системы, причем для второй из названных задач рассматривается обоснование перехода от конечного числа переменных к бесконечному введением гильбертова пространства. Построением функции Ляпунова была также решена задача об устойчивости эллипсоидов Маклорена вращающейся гравитирующей жидкости по отношению к конечному числу переменных, характеризующих простое, по Лиувиллю, движение жидкости (В. В. Румянцев, 1959). Применение теоремы Ляпунова о неустойчивости позволило строго доказать неустойчивость вихревых цепочек Кармана (Г. В. Каменков, 1934; Н. Е. Кочин, 1939).

Начиная с сороковых годов, пристальное внимание исследователей привлекает задача об устойчивости движения твердого тела, имеющего полости, целиком или частично заполненные жидкостью. Этой задаче посвящена обширная литература, причем наибольшее число работ посвящено различным линейным аспектам теории, на которых мы здесь останавливаться не будем (см. Н. Н. Моисеев и В. В. Румянцев, 1965). Первые успехи в применении к этой задаче второго метода Ляпунова были достигнуты Н. Г. Четаевым (1957). Он исследовал задачу об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого целиком заполнена идеальной жидкостью, совершающей безвихревое движение. В этом случае, как установил Н. Е. Жуковский (Ж. Рус. физ.-хим. об-ва, 1885; Полн. собр. соч., т. 3, 1936), жидкость в полости эквивалентна некоторому твердому телу, вследствие чего система описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Это обстоятельство позволяет ставить и решать задачу об устойчивости движения твердого тела с жидкостью в рассматриваемом случае как задачу об устойчивости для одного твердого тела. В такой постановке Четаев получил достаточные условия устойчивости вращательных движений снаряда с полостями в форме кругового цилиндра (и, вообще, любой полости вращения), цилиндра с одной диафрагмой и цилиндра с крестовиной.

Несколько более сложными оказываются уравнения движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение.

В этом случае уравнения движения системы одинаковы с уравнениями движения твердого тела с присоединенным к нему гироскопом, вращение которого происходит по определенному закону. Задача устойчивости для подобной системы решена построением функций Ляпунова (В. В. Румянцев, 1956—1957).

Несравненно более трудными оказываются задачи об устойчивости движения твердого тела с идеальной или, особенно, вязкой жидкостью в случае, когда о характере движения жидкости в полости не делается каких-либо специальных предположений, типа рассмотренных выше. В этом случае состояние системы описывается бесконечным числом переменных и уравнения движения представляют собой совместную систему обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных с соответствующими граничными условиями.

Для твердого тела с полостью, частично или целиком наполненной идеальной или вязкой жидкостью, В. В. Румянцев предложил ставить задачу об устойчивости движения в смысле Ляпунова по отношению к переменным q_j, q'_j, определяющим движение твердого тела, и к некоторым величинам — функционалам

$$p_s = \int_{\tau} \Phi_s(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3)\, d\tau,$$

интегральным образом характеризующим движение жидкости. Здесь $\Phi_s(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3)$ — некоторые вещественные непрерывные ограниченные функции координат x_i и скоростей v_i частиц жидкости, τ — объем жидкости. Выбор функций Φ_s зависит от характера рассматриваемой задачи. Так, за величины p_s во многих случаях целесообразно принимать проекции количества движения, момента количеств движения жидкости и т. п. При указанном подходе задача об устойчивости движения твердого тела с жидкостью (системы, обладающей бесконечным числом степеней свободы) приводится к исследованию устойчивости по отношению к конечному числу величин q_j, q'_j, p_s. Для решения последней можно с успехом применять метод функций Ляпунова (В. В. Румянцев, 1955, 1959—1960, 1962, 1964—1965). В такой постановке удалось решить ряд задач об устойчивости движения твердого тела с жидким наполнением. В частности, впервые строго решены задачи об устойчивости вращения волчка с вязкой жидкостью (В. В. Румянцев, 1960) и устойчивости относительных равновесий твердого тела с жидкостью в центральном ньютоновском поле сил (Н. Н. Колесников, 1962).

Подобная постановка задачи возможна и в проблемах устойчивости движения сплошной среды, если надлежащим образом ввести интегральные характеристики p_s движения среды. В частности, эта идея получила развитие в работах А. А. Мовчана (1959) об устойчивости упругого тела. Вводя вспомогательное метрическое пространство и строя в нем соответствующие функционалы, Мовчан доказал общие теоремы об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости процессов, обобщающие соответствующие теоремы Ляпунова и Четаева. Он ввел (1960) две метрики и сформулировал теоремы об устойчивости процессов по двум метрикам. К этому же направлению относятся и работы В. М. Слободкина и Т. К. Сиразетдинова (1964—1965). Следует отметить, что вопрос о построении соответствующих функционалов для решения конкретных задач теории упругости разработан еще недостаточно и нуждается в дальнейших исследованиях.

Другое направление в исследовании устойчивости сплошных сред, позволяющее успешно решать конкретные задачи, связано с распространением на сплошные среды теорем Лагранжа и Рауса. Как известно, названные теоремы были доказаны для систем с конечным числом степеней свободы задолго до создания Ляпуновым теории устойчивости; однако их можно доказать и на основе теоремы Ляпунова об устойчивости. Как уже упоминалось во введении, Ляпунов ввел определение устойчивости формы равновесия жидкости и установил теорему, сводящую вопрос об устойчивости формы равновесия вращающейся жидкости к решению задачи минимума функционала, представляющего собой измененную энергию системы. Задача минимума была решена А. М. Ляпуновым в его работах 1884 и особенно 1908 г. (Собр. соч., т. 3, 1959), что позволило ему получить строгие заключения об устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости в форме эллипсоидов Маклорена и Якоби, а также некоторых фигур, производных от последних.

Н. Г. Четаев (1926) исследовал вопрос о существовании непрерывной последовательности устойчивых фигур равновесия однородной в каждый момент времени вращающейся жидкой массы, находящейся под действием сил ньютоновского притяжения, сил лучистого сжатия к центру тяжести с постоянной скоростью и постоянного давления на свободной поверхности. Для выделения устойчивой последовательности фигур равновесия автор использовал теорему Лагранжа об устойчивости равновесия, которую доказал применительно к рассматриваемой системе. Несколько позднее Четаев (1931), пользуясь теоремой Ляпунова об устойчивости фигур равновесия, доказал, что если существует не бесконечно малый нижний предел для массы отдельных тел, на которые под влиянием сил ньютоновского притяжения и центробежной может распасться некоторая масса однородной несжимаемой жидкости, то для этой массы существует по крайней мере одна устойчивая фигура равновесия. Далее автор доказал две важные общие теоремы о числе реальных ветвей кривой равновесия механической системы, проходящих через точку бифуркации и о смене устойчивости. Частные случаи указанных теорем были установлены А. Пуанкаре в 1885 г. Применяя эти теоремы, Четаев доказывает существование устойчивой последовательности фигур равновесия, производной от критического эллипсоида Маклорена и распространяющейся в сторону больших значений угловой скорости вращения.

Идеи Ляпунова из теории устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости получили развитие и в работах В. В. Румянцева (1959, 1962). Принимая данное Ляпуновым определение устойчивости формы равновесия жидкости, можно дать следующее определение устойчивости стационарного движения твердого тела с жидким наполнением.

Определение 7. *Если при всяких произвольно заданных положительных числах L_1 и L_2, как бы малы они ни были, может быть выбрано положительное число λ — так, чтобы при всяких начальных значениях координат тела q_{j0} и обобщенных скоростей q'_{j0}, удаления l_0, уклонения ∇_0 и относительных скоростей жидкости, удовлетворяющих условиям*

$$|q_{j0}|\leqslant\lambda,\quad |q'_{j0}|\leqslant\lambda,\quad |l_0|\leqslant\lambda,\quad |w_0|\leqslant\lambda,\quad \nabla_0>\varepsilon l_0,$$

и при всяком $t\geqslant t_0$ или, по крайней мере, до тех пор, пока $\nabla>\varepsilon l$, выполнялись неравенства

$$|q_j|<L_1,\quad |l|<L_1,\quad |q'_j|<L_2,\quad |T_2^{(1)}|<L_2,$$

то невозмущенное стационарное движение твердого тела с жидкостью устойчиво, в противном случае — неустойчиво.

Здесь εl обозначает возможное уклонение, $T_2^{(1)}$ — относительную кинетическую энергию жидкости.

При таком определении устойчивости даны доказательства теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия и теоремы об устойчивости установившихся движений твердого тела с жидкостью в его полости. Последняя теорема сформулирована следующим образом.

Если для установившегося движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью, выражение

$$W=\frac{1}{2}\frac{k_0^2}{S}+V$$

имеет изолированный минимум, то невозмущенное движение устойчиво.

Здесь V и S обозначают потенциальную энергию системы и ее момент инерции относительно неподвижной оси; $k_0=\text{const}$. Подобная теорема доказана также для случая учета сил поверхностного натяжения жидкости (В. В. Румянцев, 1964).

Согласно этим теоремам задача об устойчивости равновесия или стационарного движения твердого тела с жидкостью приводится к задаче минимума потенциальной энергии V или измененной потенциальной энергии W системы. В случае полного заполнения жидкостью полости выражения V и W являются функциями конечного числа переменных q_j. В случае частичного заполнения полости V и W представляют собой функционалы, зависящие от формы объема τ и свободной поверхности жидкости, а также от положения тела. Так как свойство минимума является локальным, то для строгого решения задачи минимума, за исключением особых случаев, можно ограничиться рассмотрением величин второго порядка малости. Поэтому для решения этой задачи можно использовать методы теории малых колебаний, если смещение свободной поверхности от положения равновесия представить в виде ряда по системе собственных функций соответствующей краевой задачи. Таким методом был решен ряд конкретных задач о минимуме V и W (Н. Н. Моисеев, 1952; Г. С. Нариманов, 1956; В. В. Румянцев, 1962). Однако вычисления при этом оказываются довольно громоздкими, так как приходится оперировать с бесконечными рядами. В этом смысле более удобен иной способ решения задачи минимума, идея которого основана на том, что потенциальная энергия тяжелой жидкости в отклоненном от положения равновесия сосуде имеет минимум, если свободная поверхность жидкости горизонтальна. Для случая неучета сил поверхностного натяжения задачу минимума функционала удается привести к задаче минимума функции конечного числа переменных q_j (Г. К. Пожарицкий, 1962; Г. К. Пожарицкий и В. В. Румянцев, 1963). При учете сил поверхностного натяжения задача становится более сложной, однако и здесь при определенных условиях ее удается иногда привести к задаче минимума для функции конечного числа переменных (В. А. Самсонов, 1966). Доказано также обращение теоремы Лагранжа для твердого тела с полостью, содержащей жидкость, и выяснено влияние вязкости жидкости на устойчивость равновесий и стационарных движений (В. В. Румянцев, 1962—1966; Г. К. Пожарицкий, 1964). Следует подчеркнуть трудности строгого доказательства асимптотической устойчивости при наличии диссипации, связанные с возможностью концентрации зон диссипации в малых объемах сплошной среды. Более подробные сведения о работах по устойчивости тел с жидкостью можно найти в обзорах В. В. Румянцева (1962, 1965).

Распространение теоремы Рауса на случай стационарных течений идеальной жидкости дано В. И. Арнольдом (1965). Он доказал, что стационарное течение со скоростью $v(x)$ идеальной жидкости, целиком заполняющей объем D, ограниченный неподвижной поверхностью, имеет экстремальную кинетическую энергию E по сравнению со всеми близкими равнозавихренными течениями. Если квадратичная форма $\delta^2 E$ знакоопределенна, то течение $v(x)$ устойчиво относительно малых конечных возмущений, т. е. малое изменение начального поля скоростей мало меняет поле скоростей во все моменты времени.

Применение этой теоремы для ряда плоских течений жидкости позволило получить достаточные условия устойчивости, близкие к необходимым.

§ 8. Методы построения функций Ляпунова и некоторые задачи об устойчивости

Несмотря на широкое распространение и применение метода функций Ляпунова, общего способа их построения не дано, в связи с чем эффективность построения функций Ляпунова в той или иной задаче в ряде случаев зависит от искусства исследователя. Тем не менее для многих классов задач разработаны регулярные способы построения функций Ляпунова, часть которых излагается ниже.

8.1. Консервативные, гироскопические и диссипативные системы. Наиболее трудным является построение функций Ляпунова для консервативных механических систем. Еще в своем знаменитом сочинении А. М. Ляпунов отмечал, что для подобных систем «задача делается... в высшей степени трудною, и пока невозможно указать каких-либо приемов для ее решения», кроме приведения к задаче о максимумах и минимумах (теоремы Лагранжа и Рауса). Как известно, эти теоремы использовал А. Пуанкаре при разработке основ теории бифуркации равновесий механических систем, находящихся под действием сил, производных от силовой функции, зависящей от параметра. Теоремы Пуанкаре о числе реальных ветвей кривой равновесий, проходящих через точку бифуркации, и о законе смены устойчивости были обобщены Н. Г. Четаевым

(1931) при исследовании эллипсоидов, производных от фигур равновесия вращающейся жидкости.

Для случаев, когда известны первые интегралы уравнений возмущенного движения, Четаев предложил способ построения функций Ляпунова в форме связки первых интегралов. Этот способ был продемонстрирован им на решении двух конкретных задач механики (Н. Г. Четаев, 1946, 1954) и хотя в общем виде этот способ автором не излагался, он получил широкую известность и оказался весьма эффективным.

Изложим суть метода Четаева. Пусть известны некоторые голоморфные первые интегралы уравнений возмущенного движения (1.1)

$$V_i(x_1, \ldots, x_n) = C_i \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

не зависящие явно от времени.

Построим функцию

$$V = \sum_i \lambda_i V_i + \sum_j \lambda_j^* V_j^2,$$

где λ_i, λ_j^* — некоторые постоянные, подбираемые так, чтобы разложение функции V в степенной ряд по переменным x_s в окрестности невозмущенного движения $x_s = 0$ начиналось с квадратичной формы. Если окажется, что построенная таким образом функция V будет знакоопределенной, то, так как $V' \equiv 0$, она будет функцией Ляпунова из теоремы I.

Применяя этот способ к задаче об устойчивости вращения вокруг вертикали тяжелого твердого тела в случае Лагранжа и строя функцию V из всех известных четырех первых интегралов задачи, Н. Г. Четаев получил достаточное условие устойчивости, совпадающее с необходимым. В. В. Румянцев (1954—1955) на примерах задач об устойчивости вращения тяжелого твердого тела в случае Ковалевской и твердого тела в жидкости при условиях Чаплыгина показал, что достаточные условия, совпадающие с необходимыми, можно получить построением функции V из части известных первых интегралов задачи.

Отметим также, что если среди интегралов уравнений возмущенного движения имеются интегралы $V_\alpha = C_\alpha$, для которых произвольные постоянные C_α в силу тех или иных обстоятельств могут иметь только значения, равные нулю ($C_\alpha = 0$), то в этом случае функцию V можно строить также в виде (В. Н. Скимель, 1956)

$$V = \sum_j \lambda_j V_j + \sum_\alpha \mu_\alpha V_\alpha,$$

где μ_α — некоторые переменные, имеющие ограниченные производные μ'_α. При этом очевидно, что

$$V' = \sum_\alpha \mu'_\alpha V_\alpha = 0.$$

М. Ш. Аминов (1955) подметил, что в случаях, когда коэффициенты системы (1.1) стремятся при $t \to \infty$ к постоянным пределам, метод Четаева можно применить также для получения достаточных условий устойчивости неустановившихся движений. Г. К. Пожарицкий (1958) доказал, что какую-либо знакоопределенную функцию от известных первых интегралов $V_i(x, t)$ можно построить тогда и только тогда, когда знакоопределенной является функция $\sum_{i=1}^{k} V_i^2(x, t)$. Применяя метод Четаева, он предложил один из вариантов доказательства дополнения Ляпунова к теореме Рауса в несколько более сильном предположении голоморфности функции Гамильтона H.

Теорему Рауса с дополнением Ляпунова П. А. Кузьмин (1964) применил в форме, близкой к методу Четаева, для исследования устойчивости стационарных движений твердого тела.

Метод Четаева построения функций Ляпунова из известных первых интегралов уравнений возмущенного движения оказалось возможным применить также в задачах устойчивости движения по отношению к части переменных (В. В. Румянцев, 1957; М. Е. Темченко, 1958) и в задачах устойчивости твердых тел с полостями, содержащими жидкость (В. В. Румянцев, 1955, 1959—1960).

Метод Четаева получил большое распространение при решении прикладных задач. С помощью этого метода удалось решить ряд тонких проблем устойчивости в механике, в первую очередь в динамике твердого тела (Н. Г. Четаев, 1954; В. В. Румянцев, 1954—1958, 1961; П. В. Харламов, 1955; П. А. Кузьмин, 1958, 1964; В. Н. Скимель, 1956, 1959, 1962, и многие другие). Решение этих задач подготовило применение метода Четаева в задачах устойчивости искусственных спутников Земли (В. В. Белецкий, 1957, 1959, 1965; Ф. Л. Черноусько, 1964; Н. Н. Колесников, 1962; А. Анчев, 1965, и многие другие). Более подробно о приложении метода функций Ляпунова в задачах устойчивости гироскопов, гиростатов и гироскопических систем можно прочесть в обзоре В. В. Румянцева и В. Н. Скимеля (1965), а о приложениях в задачах устойчивости спутников — в обзоре В. А. Сарычева (1965). Метод Четаева успешно применялся и при решении многих других конкретных задач устойчивости, на изложении которых мы не имеем возможности остановиться.

В общем случае вопрос об устойчивости некоторого движения $q_i = q_i(t)$, $p_i = p_i(t)$ консервативной системы начинается с исследования уравнений в вариациях Пуанкаре

$$\frac{d\xi_s}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_j} \xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_j} \eta_j\right), \quad \frac{d\eta_s}{dt} = -\sum_j \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_j} \xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p_j} \eta_j\right),$$

в которых ξ_s, η_s обозначают вариации соответственно координат q_s и импульсов p_s.

Н. Г. Четаев (1945) доказал, что если рассматриваемое невозмущенное движение устойчиво, то решения уравнений в вариациях имеют все характеристичные числа равными нулю, а уравнения в вариациях являются при этом приводимыми и имеют знакоопределенный квадратичный интеграл.

Эта фундаментальная теорема обобщила теорему Лагранжа для равновесий и теорему Пуанкаре — Ляпунова для периодических движений.

Г. К. Пожарицкий (1956) показал, что если

$$W = \sum_{i, j} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j} \xi_i \xi_j$$

есть определенно-отрицательная функция ξ_i, то невозмущенное движение неустойчиво, а решения уравнений в вариациях Пуанкаре имеют отрицательное характеристичное число.

Метод функций Ляпунова был применен М. Ш. Аминовым (1949) для решения вопроса об орбитальной устойчивости консервативных механических систем. Выведя уравнения возмущенных движений в тензорной форме, Аминов получил ряд признаков устойчивости и неустойчивости как при консервативных, так и при неконсервативных возмущениях.

Вопрос об устойчивости периодических движений линейных гамильтоновых систем подробно исследовался в работах М. Г. Крейна и В. А. Якубовича, результаты которых подытожены в совместной статье этих авторов (1963). Полученные ими результаты являются основой математической теории параметрического резонанса. М. Г. Крейн установил, что собственные частоты колебаний механических систем по отношению к параметрическому резонансу подразделяются на частоты первого и второго рода. Параметрический резонанс в классе гамильтоновых систем возможен лишь в случае, когда частота возмущения близка к одному из «критических» значений $(\omega_j + \omega_h)/N$, если ω_j и ω_h — собственные частоты одного рода, и $|\omega_j - \omega_h|/N$, если ω_j и ω_h — собственные частоты разного рода (здесь N — произвольное целое число). Указано, каким образом определяется род собственных частот. В. А. Якубовичем (1958) получены формулы для границ областей динамической неустойчивости, позволяющие, в частности, классифицировать указанные выше критические значения по степени их «опасности».

К этим результатам примыкают исследования К. Г. Валеева (1963) об опасности комбинационных резонансов и В. М. Старжинского (1966—1967) о параметрическом резонансе в системах, близких к каноническим.

Метод Ляпунова оценки характеристичной постоянной системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, развитый для уравнения Хилла, был распространен на общий случай системы двух линейных уравнений с периодическими коэффициентами В. М. Старжинским (1953—1960, 1964) и на некоторые типы линейных систем произвольного порядка В. М. Старжинским (1958—1959) и В. А. Якубовичем (1957).

Рассматривая каноническую систему с функцией Гамильтона

$$H_0 = \frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{m=3}^{\infty} P_m(x, y),$$

где $P_m(x, y)$ — однородные полиномы степени m, и возмущенную систему с функцией Гамильтона

$$H = H_0 + Q(x, y, t), \qquad Q(x, y, t + 2\pi) = Q(x, y, t)$$
$$(Q:(x^2 + y^2) \to 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 \to 0),$$

Н. П. Еругин (1966) с помощью метода функций Ляпунова указал 1) классы таких голоморфных относительно x, y в окрестности $x = y = 0$ функций $Q(x, y, t)$, что точка покоя $x = y = 0$ возмущенной системы будет неасимптотически устойчива при любом λ; 2) классы таких голоморфных относительно x, y функций $Q(x, y, t)$, что точка покоя $x = y = 0$ не будет устойчивой.

Показано также, что при любой H_0 всегда можно указать такие конечно-разрывные вдоль кривой функции $Q(x, y, t)$, сколь угодно малые в окрестности $x = y = 0$ (малые более высокого порядка, чем $(x^2 + y^2)^m$ с $m > 0$) вместе со всеми производными, что будет выполнена теорема существования и единственности для возмущенной системы, а точка покоя $x = y = 0$ будет по выбору Q или неасимптотически устойчивой, или асимптотически устойчивой, или неустойчивой.

Весьма важные результаты по устойчивости гамильтоновых систем были получены в большом цикле работ А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда методом Колмогорова (1954). Изложение этих результатов выходит за рамки настоящего очерка; они изложены в обзоре В. И. Арнольда (1965).

Отметим, что вопрос о влиянии на устойчивость движения консервативных систем постоянно действующих потенциальных возмущений исследовался Н. Г. Четаевым (1932, 1936). Влияние возмущающих сил такой природы на устойчивость стационарных движений рассмотрели недавно А. Л. Куницын (1966) и В. В. Румянцев (1966—1967), предложившие также различные варианты доказательства дополнения Ляпунова к теореме Рауса.

Вопрос о влиянии гироскопических и диссипативных сил на устойчивость положения равновесия консервативной системы был поставлен, как известно, В. Томсоном (лордом Кельвином), установившим ряд теорем. Эти теоремы Кельвина впервые были строго доказаны применением функций Ляпунова в весьма изящной форме Четаевым (1946), обратившим при этом внимание на принципиальную и прикладную важность введенных Кельвином понятий вековой и временной устойчивости и возможность гироскопической стабилизации. Впоследствии, например, Четаев (1956) показал, что равносторонний треугольник в плоской задаче трех тел неустойчив при постоянстве угловой скорости ω вращения луча, соединяющего какие-либо два тела из трех, и его нельзя стабилизировать добавлением каких-либо гироскопических сил. В случае движения относительно центра масс системы, когда $\omega \neq \text{const}$, вообще, лапласов треугольник не имеет вековой устойчивости, но может иметь гироскопическую устойчивость.

Д. Р. Меркин (1956) исследовал устойчивость линейной системы, находящейся под действием только гироскопических сил. Рассмотрением характеристического уравнения он доказал, что для устойчивости равновесия такой системы необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы гироскопических коэффициентов $\| g_{ij} \| \neq 0$. Показано также, что если на систему помимо гироскопических действуют и диссипативные силы с полной диссипацией, то положение равновесия всегда устойчиво в первом приближении. В. В. Румянцев (1957) показал, что положение равновесия нелинейной системы при указанных условиях асимптотически устойчиво по отношению к скоростям q_i'. В. М. Матросов (1959) обобщил эти результаты, доказав, что положение равновесия нелинейной системы устойчиво относительно q_i и q_i', а всякое возмущенное движение асимптотически приближается к одному из положений равновесия $q_i = c_i$, $q_i' = 0$, причем устойчивость сохраняется и при параметрических возмущениях.

Влияние диссипативных сил на устойчивость движения изучал также Г. К. Пожарицкий (1957, 1961). Рассматривая стационарное движение системы с циклическими координатами, находящейся под действием сил с полной диссипацией и постоянных сил, уравновешивающих диссипативные силы на стационарном режиме, переносом результатов Четаева он установил, что стационарное движение будет асимптотически устойчиво по отношению ко всем скоростям и нециклическим координатам, если вторая вариация полной энергии является определенно-положительной функцией, и неустойчиво, если она может принимать отрицательные значения (1957); Пожарицкий изучал также устойчивость систем с частичной диссипацией (1961). Им установлено условие асимптотической устойчивости, состоящее в определенной положительности второй вариации энергии и некотором дополнительном неравенстве. При выполнении указанных условий оказалось возможным приближенно подсчитать логарифмические декременты затухания в случаях, когда затухание либо очень мало, либо очень велико (Г. К. Пожарицкий, 1965). Эти условия нашли дальнейшее развитие в связи с задачами общей теории оптимального управления, сомкнувшись с условиями управляемости и наблюдаемости, играющими важную роль в теории стабилизации управляемых систем (подробнее см. обзор Н. Н. Красовского в этом томе).

В. М. Матросов (1959) рассмотрел вопрос об устойчивости гироскопической системы при полной диссипации в случае, когда некоторые из коэффициентов устойчивости Пуанкаре $\lambda_s = 0$ $(s = 1, \ldots, m)$, остальные $\lambda_r > 0$ $(r = m + 1, \ldots, n)$, а положение равновесия может и не являться изолированным. Доказано, что если равенства $\partial U/\partial x_s = 0$ имеют место при любых x_s из области $\sum\limits_{s=1}^{n} x_s^2 \leqslant H$, причем $x_r = x_r(x_1, \ldots, x_m)$ представляют решение уравнений $\partial U/\partial x_r = 0$, то положение равновесия $x_s = 0$ устойчиво, а всякое возмущенное движение асимптотически приближается к одному из положений равновесия $x_s = l_s$, $x_r = x_r(l_1, \ldots, l_m)$. Матросов показал также, что если силовая функция U может принимать положительные значения при сколь угодно малых $|q_i|$, то положение равновесия гироскопической системы с диссипацией неустойчиво. Аналогичный результат был получен также В. Т. Койтером (1965). В. Н. Скимель (1963) показал, что если силовая функция $U(q_1, \ldots, q_m)$ в положении равновесия имеет изолированный максимум, то положение равновесия линейной гироскопической системы устойчиво по отношению к переменным $q_1, \ldots, q_m, q_1', \ldots, q_n'$, а также и по отношению к $q_{m+1}, \ldots, q_n$, если определитель $G' = \| g_{\beta j} \| > 0$ $(\beta, j = m + 1, \ldots, n)$. Если же $G' = 0$, то равновесие неустойчиво по отношению к $q_{m+1}, \ldots, q_n$.

Для нестационарной системы с силовой функцией вида $U(q) = \sum\limits_{k=m}^{\infty} U_k(q)$ $(m \geqslant 2)$ и полной диссипацией В. М. Матросов (1962) установил, что если функции $U(q)$ и $\sum\limits_{k=m}^{\infty} kU_k(q)$ определенно-отрицательны, то положение равновесия $q_i = 0$ асимптотически устойчиво равномерно по q_{i0}, q_{i0}', t_0. Если же $U(q)$ может принимать положительные значения, а функция $\sum\limits_{k} kU_k(q)$ знакоопределенна, то положение равновесия неустойчиво.

Д. Р. Меркин (1956) исследовал влияние на устойчивость положения равновесия консервативной системы сил радиальной коррекции, гироскопических, диссипативных и так называемых ускоряющих сил вида $b_i x_i'$ $(b_i > 0)$ и установил ряд теорем, часть из которых обобщили предыдущие результаты И. И. Метелицына (1952) и Г. Циглера (ZAMP, 1953, 4 : 2). В. В. Румянцев (1962) исследовал устойчивость равномерных вращений голономных систем и установил один случай обращения теоремы Рауса, из которого, в частности, следует, что если квадратичная часть разложения в ряд Маклорена функции Лагранжа L (или функции Рауса R) определенно-положительна, то относительное равновесие (или стационарное движение) неустойчиво. Кроме того показано, что если относительное равновесие системы устойчиво вековым образом, то устойчиво и соответствующее стационарное движение системы. Частные случаи обращения теоремы Рауса рассматривались также С. А. Харламовым (1962) и Ван Чжао-лином (ПММ, 1953, 27 : 5). Л. Н. Семенова (1965) отметила возможность применения теоремы Рауса при определенных условиях к исследованию устойчивости стационарных движений неголономных систем с циклическими координатами. Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев (1966) рассмотрели многообразие стационарных движений и высказали мнение, что наличие последнего обусловливает существенные особенности исследования их устойчивости по сравнению со случаями изолированного равновесия системы. В. В. Румянцев (1966) развил метод исследования устойчивости стационарных движений систем с циклическими координатами, основанный на теоремах Рауса, Пуанкаре, Ляпунова, Кельвина и Четаева. Этот метод характеризуется единообразием подхода к исследованию устойчивости разнообразных механических систем и позволяет получать необходимые и достаточные условия «вековой» устойчивости. Это понятие обобщает на стационарные движения понятие вековой устойчивости равновесия Кельвина. Доказана следующая теорема, обращающая теорему Рауса.

Если в области $H<0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} q_i \dfrac{\partial R}{\partial q_i'} > 0$ функция

$$2R_2+R_1+\sum_{i=1}^{k} q_i \frac{\partial R}{\partial q_i}$$

определенно-положительна относительно q_i, q_i', то стационарное движение неустойчиво.

Здесь R_s обозначает форму степени s относительно q_i', входящую в функцию $R = R_2 + R_1 + R_0$.

Вопрос об устойчивости равновесия неголономных систем после работ Э. Т. Уиттекера и О. Боттема (Indagationes math., 1949, 11 : 4) рассматривался в ряде статей главным образом путем исследования корней характеристического уравнения. Применением метода функций Ляпунова Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев (1965) установили теорему об устойчивости равновесия неголономной системы при действии возмущающих сил.

В. В. Румянцев (1967) исследовал вопрос о применимости теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия к неголономным системам, рассмотрел обращение этой теоремы и изучил влияние диссипативных сил на устойчивость равновесия таких систем.

8.2. Неустановившиеся движения. Изложим восходящий к работам Н. Г. Четаева (1945—1946) метод построения функций Ляпунова для уравнений возмущенного движения вида

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + R_s(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (s=1, \ldots, n), \quad (8.1)$$

где $p_{sr}(t)$ — непрерывные (или кусочно-непрерывные) ограниченные функции t, $R_s(x_1, \ldots, x_n, t)$ — голоморфные функции x_s с ограниченными коэффициентами, начинающиеся с членов не ниже второго порядка малости по x_s. Сущность его состоит в следующем (Н. Н. Красовский, 1959). Системе (8.1) ставится в соответствие линейная система уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = c_{s1}x_1 + \ldots + c_{sn}x_n, \quad (8.2)$$

для которой квадратичная функция $V(x)$ определяется однозначным образом согласно теореме Ляпунова из уравнения

$$\sum_s \frac{\partial V}{\partial x_s}(c_{s1}x_1 + \ldots + c_{sn}x_n) = W(x), \tag{8.3}$$

где $W(x)$ — произвольно заданная определенно-положительная функция, если только корни характеристического уравнения

$$\| c_{sr} - \delta_{sr}\lambda \| = 0 \tag{8.4}$$

для системы (8.2) таковы, что ни для каких целых неотрицательных чисел m_s, равных в сумме 2, не уничтожается выражение $\sum\limits_s m_s\lambda_s$. За числа c_{sr} принимаются или $p_{sr}(t_0)$, или $p_{sr}(\infty)$, или $p_{sr}(t^*)$, где t^* — некоторый момент времени ($t_0 \leqslant t^* < \infty$), или величины $(1/T)\int\limits_0^T p_{sr}(t)\,dt$ и т. д.

Таким образом построенная функция $V(x)$ используется для исследования системы (8.1), причем при определенных условиях удается определить параметры системы таким образом, что устойчивость или неустойчивость системы (8.2) имеют место одновременно и для системы (8.1). Пусть, например, все корни уравнения (8.4) имеют отрицательные вещественные части ($\operatorname{Re}\lambda_s < 0$). Зададим определенно-положительную функцию

$$W = \sum_{i,j=1}^n d_{ij}x_ix_j \qquad (d_{ij} = d_{ji})$$

и построим определенно-отрицательную функцию $V(x) = \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$, удовлетворяющую уравнению (8.3). В силу уравнений (8.1) найдем

$$V^{\cdot} = W(x) + \sum_{i,j,k}[a_{ij}(p_{jk} - c_{jk}) + a_{kj}(p_{ji} - c_{ji})]\,x_ix_j + \sum_{i,j} a_{ij}x_jR_i(x,t).$$

Так как каждую функцию R_i можно представить в виде

$$R_i(x,t) = \sum_{k=1}^n h_{ik}(x,t)\,x_k, \tag{8.5}$$

то производная V' принимает вид

$$V' = \sum_{i,j,k}[d_{ik} + a_{ij}(p_{jk} - c_{jk}) + a_{kj}(p_{ji} - c_{ji}) + a_{ij}h_{jk} + a_{kj}h_{ji}]\,x_ix_k = \\ = \sum_{i,k} e_{ik}x_ix_k.$$

Условия определенной положительности функции V' имеют вид

$$\Delta_i > \mu \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \mu = \text{const} > 0),$$

где Δ_i — главные диагональные миноры матрицы $\| e_{ik} \|$.

Эти неравенства и позволяют оценить значения ограниченных параметров h_{ij} и $p_{ij} - c_{ij}$, при которых невозмущенное движение $x_s = 0$ асимптотически устойчиво в силу системы уравнений (8.1), а также найти оценку области притяжения.

Эти приемы построения функций Ляпунова для систем (8.1) получили большое распространение и успешно применялись многими авторами

(М. А. Айзерман, 1946—1947, 1951—1952; В. И. Зубов, 1953; Н. Н. Красовский, 1959; И. Г. Малкин, 1952; В. В. Румянцев, 1956; В. М. Старжинский, 1952—1953, 1955; А. П. Тузов, 1955, и многие другие).

Отметим, что представление функций R_i в виде (8.5) и последующий анализ условий устойчивости зависят от выбора переменных x_i. Эти задачи могут быть весьма упрощены удачным преобразованием переменных x_j и, в частности, линейной заменой $y_j = \sum_j b_{ij}x_j$.

Получаемые достаточные условия устойчивости в значительной степени определяются тем, какими были выбраны форма $W(x)$ и линейная система (8.2). Варьируя форму $W(x)$, можно получить более или менее широкие достаточные условия устойчивости и оценки области притяжения. С этой точки зрения В. М. Старжинский (1952—1953, 1955) исследовал некоторые линейные системы с переменными коэффициентами второго, третьего и четвертого порядков. Ему удалось получить эффективные достаточные условия устойчивости, содержащие только верхние и нижние границы изменения коэффициентов уравнений. О связи этих условий с некоторыми другими можно познакомиться по обзору Старжинского (1954).

Н. Г. Четаев (1945) предложил также параметрическое рассмотрение уравнений вида (6.3). Если ни для какого $t \geqslant t_0$ не существует целых неотрицательных чисел m_s, $\sum_s m_s = 2$, для которых уничтожается выражение $\sum m_s\lambda_s$, где λ_s — корни уравнения $\Delta(\lambda) = \| p_{sr} - \delta_{sr}\lambda \| = 0$, то для таких значений t будет существовать квадратичная форма $V = \sum_{s,r} a_{sr}x_sx_r$ с ограниченными коэффициентами $a_{sr} = a_{rs}$, зависящими от t, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_s \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = -\sum_s x_s^2, \tag{8.6}$$

в котором t играет роль параметра. В силу уравнений (6.3) ее полная производная по времени

$$V' = -\sum_s x_s^2 + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Если для всех $t \geqslant t_0$ производные a'_{sr} ограничены, а все главные диагональные миноры D_i дискриминанта $D = \| a'_{rs} - \delta_{sr} \|$ удовлетворяют неравенствам $(-1)^r D_r > \mu > 0$, то V' будет определенно-отрицательной функцией x_s. При этих условиях, если V представляет определенно-положительную форму, невозмущенное движение будет устойчиво; если V еще и допускает бесконечно малый высший предел, то устойчивость будет асимптотической. Если же V допускает бесконечно малый высший предел и может принимать отрицательные значения, то невозмущенное движение неустойчиво.

Параметрическое рассмотрение может быть практически полезно, когда коэффициенты $p_{sr}(t)$ медленно меняются с течением времени.

Очень полезный прием варьирования функций $V(x, t)$ при подгонке их к данной системе уравнений, предложенный также Н. Г. Четаевым, заключается в умножении V на некоторую функцию $\psi(x, t)$. Этот прием был применен в ряде работ (Б. С. Разумихин, 1956; А. А. Лебедев, 1957; Н. Н. Красовский, 1959, и др.). Предположим, что корни уравнения $\| p_{sr} - \delta_{sr}\lambda \| = 0$ при каждом фиксированном $t \geqslant t_0$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}\lambda_j < \gamma < 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда существует определенно-положительная функция $V = \sum_{s,r} a_{sr}x_s x_r$, удовлетворяющая уравнению (8.6), коэффициенты которой будем предполагать дифференцируемыми. Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$f(x, t) = e^{\beta(t)} V(x, t).$$

В силу системы (6.3) ее полная производная по времени

$$f' = e^{\beta}\left[-\sum_{i=r}^{n} x_i^2 + \sum_{i,\,j=1}^{n} (a'_{ij} + \beta' a_{ij}) x_i x_j\right] = W(x, t)\, e^{\beta}.$$

Так как $W \leqslant \rho_{\max} \sum_i x_i^2$, где $\rho_{\max}$ — наибольший корень уравнения

$$\| c_{ij} - \rho\delta_{ij} \| = 0, \qquad c_{ij} = -\delta_{ij} + a'_{ij} + \beta' a_{ij}, \tag{8.7}$$

то для определенной отрицательности W достаточно выбрать $\beta(t)$ таким образом, чтобы корни уравнения (8.7) удовлетворяли неравенству $\rho_{\max} < \alpha < 0$. Это условие задает верхнюю границу $\overline{\beta}(t)$ для функции $\beta'(t)$. Для того чтобы функция $f(x, t)$ была определенно-положительной, надо потребовать выполнения условия $\beta(t) > N > -\infty$, для чего достаточно выполнения неравенства

$$\int_0^t \overline{\beta}(t)\, dt = N_1 \geqslant -\infty.$$

В качестве функции $\overline{\beta}(t)$ можно выбрать наибольший корень уравнения

$$\| a'_{ij} - (1 - \alpha)\rho a_{ij} - \delta_{ij} \| = 0,$$

взятый с обратным знаком.

Близкий к методу Четаева возможный способ построения функций Ляпунова для линейных уравнений с переменными коэффициентами предложил Я. Н. Ройтенберг (1958). Этот способ состоит в выделении из коэффициентов уравнений части, не зависящей от времени. Система преобразуется так, чтобы выделенная постоянная часть имела канонический вид, корни характеристического уравнения которой были бы простыми. Функция Ляпунова V строится далее в виде суммы квадратов новых переменных со знаком минус. Условия устойчивости доставляются условиями определенной положительности V', накладывающими на переменные части коэффициентов некоторые ограничения. Успешность решения задачи зависит от удачного разделения уравнений на постоянную и переменную части. Для большей гибкости процедуры предлагается варьировать функцию Ляпунова введением коэффициентов перед квадратами переменных. Этот способ Я. Н. Ройтенберг (1965) распространил в дальнейшем на линейные уравнения в конечных разностях. Роль производной функции Ляпунова здесь уже играет в силу системы первая разность функции Ляпунова (см. Ю. И. Неймарк, 1958).

8.3. Устойчивость систем автоматического регулирования. Для теории автоматического регулирования представляет интерес исследование устойчивости систем вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i f(\sigma), \qquad \sigma = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad (a_{ij},\, b_i,\, c_i - \text{const}). \tag{8.8}$$

Функция $f(\sigma)$ описывает характеристику сервомотора или аналогичных нелинейных звеньев. Предполагается, что $f(\sigma)$ принадлежит к классу непрерывных функций, причем

$$\sigma f(\sigma) > 0 \quad \text{при} \quad \sigma \neq 0, \quad f(0) = 0. \tag{8.9}$$

При этом различаются основной случай, когда все корни характеристического уравнения разомкнутой системы $\| a_{ij} - \delta_{ij}\lambda \| = 0$ лежат в левой полуплоскости, простой критический случай, когда имеется один нулевой корень, а остальные лежат в левой полуплоскости, и общий критический случай, когда все корни этого уравнения расположены в левой замкнутой полуплоскости (из них произвольное число — на мнимой оси).

А. И. Лурье поставил для системы (8.8) задачу: определить параметры так, чтобы невозмущенное движение $x = 0$ было устойчиво в целом при всех функциях $f(\sigma)$ из рассматриваемого класса. Для решения этой задачи А. И. Лурье и В. Н. Постников (1944) предложили плодотворный прием построения функции Ляпунова в виде суммы квадратичной формы и интеграла от $f(\sigma)$ с переменным пределом вида

$$V = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}x_i x_j + \mu \int_0^{\sigma} f(v)\,dv \qquad (\mu = \mathrm{const}). \tag{8.10}$$

Здесь e_{ij} — некоторые специальным образом подобранные коэффициенты, зависящие от n параметров. Для указанных параметров Лурье получил систему квадратных уравнений, наличие вещественного решения которых гарантирует устойчивость в целом. Для $n \leqslant 4$ условия существования решения этих уравнений были найдены в явном виде (А. И. Лурье, 1951).

Метод Лурье был развит в работах А. М. Летова (1953—1962), П. В. Бромберга (1953), И. Г. Малкина (1951), Р. А. Спасского (1954) и многих других авторов, причем в наиболее общей форме Е. Н. Розенвассером (1960) и В. А. Якубовичем (1963). Близкие методы построения функций Ляпунова вида (8.10) были рассмотрены в работах Н. Н. Красовского (1954—1959), В. В. Румянцева (1956), Б. С. Разумихина (1956), Е. А. Барбашина (1960), В. А. Плисса (1958) и др. В этом же направлении интенсивно работает большая группа американских ученых (С. Лефшец, Г. Сеге, Ж. Ла-Салль, Р. Калман, Дж. Бертрам, Дж. Пирсон, К. Мейер и др.).

Первое время предполагалось, что условия устойчивости, полученные по методу Лурье, могут быть расширены путем использования всех функций Ляпунова вида (8.10). Однако в работах В. А. Якубовича (1960; 1964), Р. Калмана (Proc. Nat. Acad. Sci., 1963, 49 : 2), М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера (1963) было доказано, что условия, получаемые по методу Лурье, на самом деле охватывают все условия, которые могут быть получены при помощи функций Ляпунова вида (8.10). Другой плодотворный подход к проблеме абсолютной устойчивости систем (8.8), не связанный с использованием функций Ляпунова, был разработан румынским математиком В. М. Поповым (1959—1961), предложившим некоторое частотное условие устойчивости.

Метод Попова был развит и использован многими учеными. В. А. Якубович (1962—1964), Р. Калман (1963), М. А. Айзерман и Ф. Р. Гантмахер (1963) установили, что в основном случае критерий Попова эквивалентен условиям, которые получаются по методу Лурье.

Таким образом, трудами многих ученых была решена проблема Лурье разыскания необходимых и достаточных условий существования функции

Ляпунова вида (8.10), каковыми оказались условия, получаемые по методу Лурье, или частотное условие Попова.

Эти важные исследования были затем распространены на системы с гистерезисными нелинейностями, с разрывными нелинейностями и неединственным положением равновесия и др.

Более подробно с работами, связанными с задачей и методом Лурье, можно познакомиться по обзорам А. М. Летова и А. И. Лурье (1957), А. М. Летова (1960) и Ф. Р. Гантмахера и В. А. Якубовича (1965).

Метод Лурье построения функций Ляпунова вида (8.10) нашел широкое применение также при решении одной задачи из теории автоматического управления, поставленной М. А. Айзерманом (1949). Эта задача состоит в следующем. Наряду с системой уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}f_{ij}(x_j) \tag{8.11}$$

рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}h_{ij}x_j \tag{8.12}$$

и предположим, что при изменении параметров h_{ij} системы в области

$$\text{(а)} \qquad k_{ij} < h_{ij} < K_{ij} \tag{8.13}$$

или в области

$$\text{(б)} \qquad k_{ij} \leqslant h_{ij} \leqslant K_{ij} \tag{8.14}$$

(k_{ij}, K_{ij} — const) невозмущенное движение $x = 0$ асимптотически устойчиво в силу линейной системы уравнений (8.12). Требуется выяснить, будет ли асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях решение $x = 0$ нелинейной системы уравнений (8.11), если нелинейные функции $f_{ij}(x_j)$ удовлетворяют неравенству

$$k_{ij} < \frac{f_{ij}(x_j)}{x_j} < K_{ij} \tag{8.15}$$

или неравенству

$$k_{ij} \leqslant \frac{f_{ij}(x_j)}{x_j} \leqslant K_{ij} \tag{8.16}$$

при $x_j \neq 0$. Непрерывные нелинейные функции $f_{ij}(x_j)$, удовлетворяющие условиям (8.15), условно отнесем к классу (а), а удовлетворяющие условиям (8.16) — к классу (б).

Задаче Айзермана посвящено большое число исследований (Е. А. Барбашин, 1952; А. П. Дувакин и А. М. Летов, 1954; Н. П. Еругин, 1952, 1955; Б. А. Ершов, 1953; Н. Н. Красовский, 1953—1955; А. М. Летов, 1953, 1955; А. И. Лурье, 1955; И. Г. Малкин, 1951—1953; В. А. Плисс, 1957; А. П. Тузов, 1955, и многие другие).

Задача Айзермана для случая $n = 2$ исследована Н. П. Еругиным (1950, 1952), указавшим многие случаи, когда задачи (а) и (б) имеют положительное решение. Для решения этой задачи он применил качественные методы исследования траекторий на плоскости x_1, x_2. Эти работы привлекли внимание многих ученых как к этой задаче, так и вообще к задачам устойчивости в целом. Построением функций Ляпунова по методу Лурье И. Г. Малкин (1952) показал, что для случая $n = 2$ задача (б) имеет положительное решение. Н. Н. Красовский (1952) показал, что задача (а) имеет отрицательное решение, чем и была обоснована необходимость различать задачи (а) и (б). Случай $n = 3$ подробно исследован В. А. Плиссом (1958). Он обнаружил также следующее важное обстоятельство: *при $n \geqslant 3$ при выполнении для системы с нелинейностью обобщенных* условий Гурвица возможны периодические движения. При $n > 3$ указаны некоторые соотношения между коэффициентами a_{ij}, для которых задача имеет положительное решение (А. И. Огурцов).

§ 9. Об устойчивости движения по первому приближению

Рассматривая уравнения возмущенного движения вида

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s, \tag{9.1}$$

А. М. Ляпунов установил теоремы об устойчивости и неустойчивости по первому (линейному) приближению

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \tag{9.2}$$

и в этом видел свое главное достижение. Для случая установившихся движений, когда $p_{sr} = \mathrm{const}$, эти важные теоремы были доказаны построением квадратичных функций Ляпунова для уравнений первого приближения и применением этих функций для исследования полных уравнений возмущенного движения. В случае неустановившихся движений, когда $p_{sr} = p_{sr}(t)$, теорема об устойчивости по первому приближению для правильных систем была доказана Ляпуновым при помощи некоторых рядов, удовлетворяющих уравнениям возмущенного движения. Впоследствии эта же теорема Ляпунова об устойчивости была доказана Н. Г. Четаевым (1946) построением квадратичной функции Ляпунова. Кроме того, были доказаны теоремы о неустойчивости по первому приближению для правильных систем (Н. Г. Четаев, 1944), а также теоремы об устойчивости и неустойчивости по первому приближению для неправильных систем (Н. Г. Четаев, 1948). Последние две теоремы Четаева сформулированы следующим образом.

Пусть система дифференциальных уравнений первого приближения не есть правильная; если все ее характеристичные числа больше σ, то невозмущенное движение устойчиво, а если среди ее характеристичных чисел найдется по крайней мере одно отрицательное, численно большее σ, то невозмущенное движение неустойчиво.

Здесь σ — некоторое положительное число, такое, что $S + \mu = -\sigma$, где S — сумма всех характеристичных чисел нормальной системы решений x_{sr} уравнений первого приближения, а μ — характеристичное число функции Δ^{-1}, причем $\Delta = \| x_{sr} \|$. Для правильных систем (9.2) $\sigma = 0$. В 1945 г. Четаев доказал, что если при неограниченном увеличении t коэффициенты $p_{ij}(t)$ стремятся к определенным пределам c_{ij}, то наинизшее характеристичное число системы (9.2) совпадает с наинизшим характеристичным числом предельной системы.

В качестве следствия из этой теоремы получается следующий критерий устойчивости по первому приближению. Если элементы матрицы $\| c_{ij} \|$ таковы, что действительные части корней характеристического уравнения $\| c_{ij} - \delta_{ij}\lambda \| = 0$ отрицательны, то невозмущенное движение $x_s = 0$ асимптотически устойчиво.

Рассматриваемый способ Ляпунова — Четаева доказательства этих теорем впоследствии многими авторами использовался для решения вопроса об исследовании поведения траекторий системы уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_n, t) + R_s(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{9.3}$$

по уравнениям системы первого (не обязательно линейного) приближения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (s = 1, \ldots, n), \tag{9.4}$$

траектории которой обладают некоторым известным свойством и для которой может быть построена функция Ляпунова V с соответствующими свойствами. При этом требуется определить те вариации R_s правых частей уравнений возмущенного движения (9.4), при которых функция V продолжает сохранять свои свойства и в силу полной системы (9.3).

Так, в случаях, исследованных Ляпуновым и Четаевым, функции $X_s(x, t)$ представляют собой линейные формы переменных x_s с постоянными или непрерывными и ограниченными коэффициентами p_{sr}, $R_s(x, t)$ представляются рядами по целым степеням x_s, начинающимися членами не ниже второго порядка малости, с ограниченными коэффициентами. Критерий Ляпунова был обобщен Э. Коттоном и К. П. Персидским (1936—1937).

И. З. Штокало (1946) дал критерий асимптотической устойчивости нулевого решения (при достаточно малом ε) линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = \left(A + \varepsilon \sum_{\mu} C_\mu e^{i\mu t}\right) x,$$

где A, C_μ — постоянные матрицы, а μ пробегает конечное число значений.

Н. П. Еругин (1948), пользуясь одной теоремой Штокало, показал, что при условиях Штокало относительно линейной системы будет асимптотически устойчиво и нулевое решение нелинейной системы

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} p_{\nu k} y_\nu + R_k(y_1, \ldots, y_n, t)$$

$$(|R_k(y, t)| \leqslant K(y_1^2 + \ldots + y_n^2)),$$

где K — постоянное.

И. Г. Малкин (1951) рассмотрел случай, когда функции X_s в уравнениях (9.3) представляют собой формы $X_s^m(x)$ m-го порядка $(m \geqslant 1)$ переменных x_s, не зависящие от t, а функции R_s в области $t \geqslant 0$, $|x_s| \leqslant H$ непрерывны и удовлетворяют неравенствам

$$|R_s| < A\{|x_1| + \ldots + |x_n|\}^m, \tag{9.5}$$

где A (> 0) — некоторая постоянная. Он доказал, что если невозмущенное движение асимптотически устойчиво в силу уравнений первого приближения (9.4), то то же самое будет справедливо и в силу полных уравнений, при любом выборе функций R_s, удовлетворяющих условиям (9.5), если только постоянная A достаточно мала.

В случае, когда члены наинизшего порядка в уравнениях возмущенного движения зависят от времени, дело обстоит сложнее. В этом случае условие асимптотической устойчивости для уравнений первого приближения недостаточно, вообще говоря, для обеспечения устойчивости в силу полной системы уравнений, а с другой стороны, это условие не является необходимым (К. П. Персидский, 1936—1937; О. Перрон, Math. Z., 1930, 32 : 5).

Для уравнений вида (9.1), кроме критериев Ляпунова и Четаева, предложены и другие критерии устойчивости по первому приближению.

Критерий И. Г. Малкина (1934). Если для уравнений первого приближения существует допускающая бесконечно малый высший предел знакоопределенная функция $V(x, t)$, производная от которой есть знакоопределенная функция противоположного знака, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво при любом выборе функций R_s, удовлетворяющих условиям (9.5) при $m = 1$, если только постоянная A достаточно мала.

Критерий К. П. Персидского (1936—1937). Если для уравнений первого приближения при любых $t > t_0 \geqslant 0$ выполняются неравенства

$$|x_{sj}(t, t_0)| < Be^{-\alpha(t-t_0)}, \tag{9.6}$$

где B и α — положительные постоянные, не зависящие от t_0, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво при любом выборе функций R_s, удовлетворяющих условиям (9.5) при $m = 1$, если только постоянная A достаточна мала.

Эти два критерия эквивалентны между собой, а также с критерием Перрона (1930), однако они не эквивалентны критерию Ляпунова (см. И. Г. Малкин, 1935; К. П. Персидский, 1936—1937).

Эти критерии означают, что если неустановившееся движение $x_s = 0$ асимптотически устойчиво в линейном приближении и если при этом возмущенные движения $x_s(t, t_0)$ линейного приближения удовлетворяют оценке (9.6), характерной для асимптотической устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами, то имеет место асимптотическая устойчивость в силу полной системы уравнений (9.3) при условиях (9.5), где $m = 1$. Н. Н. Красовский (1959) обобщил этот критерий на задачи устойчивости по первому приближению и в тех случаях, когда правые части уравнений первого приближения (9.4) представляют собой однородные формы от x_s произвольного порядка $m \geqslant 1$ с переменными по t непрерывными и ограниченными коэффициентами. Именно, справедлива следующая теорема. Пусть решение $x = 0$ системы уравнений (9.4) удовлетворяет неравенству

$$\| x(x_0, t_0, t) \|_2^{m-1} \leqslant [B \| x_0 \|_2^{m-1} + \alpha(t - t_0)]^{-1}.$$

Можно указать такое число $A > 0$, что решение $x = 0$ системы (9.3) будет также асимптотически устойчивым, если только выполняется условие (9.5).

Е. А. Барбашин и М. А. Скалкина (1955) показали, что если для некоторых уравнений вида (9.4), где X_s — произвольные нелинейные функции, удовлетворяющие условиям Липшица, выполняется оценка (9.5), то невозмущенное движение $x_s = 0$ асимптотически устойчиво в силу полных уравнений вида (9.3) при любом выборе функций R_s, удовлетворяющих неравенству (9.5) при $m = 1$, если только постоянная A достаточно мала.

И. Г. Малкин (1938) предложил еще один критерий. Невозмущенное движение асимптотически устойчиво при любом выборе функций $R_s(x, t)$, удовлетворяющих условию (9.5), если вместо неравенств (9.6), фигурирующих в критерии К. П. Персидского, будут выполняться при всех $t >$ $> t_0 \geqslant 0$ неравенства

$$|x_{sj}(t, t_0)| < Be^{\beta t_0}e^{-\alpha(t-t_0)},$$

где B и α — не зависящие от t_0 положительные постоянные, а постоянная β (>0) удовлетворяет неравенству $\beta < (2m - 1)\alpha$.

С рассматриваемым кругом вопросов тесно связано понятие грубости системы. Критериями устойчивости по первому приближению выяснено, таким образом, что существует некоторая граница $R(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ при $x \neq 0$, такая, что при $|R_s| \leqslant R$ свойства траекторий полной (9.3) и приближенной (9.4) систем уравнений возмущенного движения одинаковы. Системы, обладающие устойчивыми относительно произвольных, достаточно малых вариаций свойствами ($R_s \neq 0$ при $x \neq 0$), называются грубыми системами.

Н. Г. Четаев ([1953] 1960) называл грубыми те нелинейные системы (1.1), для которых вопросы устойчивости корректно разрешаются довольно простыми приближенными способами. Разумеется, наибольший интерес привлекают системы, для которых задача об устойчивости движения сводится к рассмотрению линейных уравнений (9.2) с постоянными коэффициентами.

Допустим, что коэффициенты p_{sr} имеют вид

$$p_{sr} = c_{sr} + \varepsilon f_{sr}, \tag{9.7}$$

где c_{sr} — постоянные, ε — параметр, f_{sr} — ограниченные вещественные функции переменных t и x_s в области (1.4).

Если корни уравнения $\| c_{sr} - \delta_{sr}\lambda \| = 0$ таковы, что при любых целых неотрицательных m_s $\sum\limits_s \lambda_s m_s \neq 0$, причем $\sum\limits_s m_s = 2$, то в силу теоремы Ляпунова уравнение в частных производных

$$\sum_s \frac{\partial V}{\partial x_s}(c_{s1}x_1 + \ldots + c_{sn}x_n) = -\sum_s x_s^2 = U(x)$$

однозначно определяет квадратичную форму $2V = \sum a_{sr}x_s x_r$. При численно достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\mu > 0$ производная V' в силу уравнений (9.2) при учете (9.7) удовлетворяет условию

$$-V' - \mu \sum_s x_s^2 = \sum_{s,r} h_{sr}x_s x_r > 0 \quad \text{при} \quad \sum_s x_s^2 \neq 0.$$

Асимптотическая устойчивость или неустойчивость невозмущенного движения определяется, таким образом, постоянными c_{sr}. Величины A и ε определяются при этом неравенствами Сильвестра для формы $\sum h_{sr}x_s x_r$. Четаев отмечает возможность варьирования оценки чисел ε и A за счет изменения формы $U(x)$ и тем самым возможность получить при оптимальном выборе U наиболее широкие оценки.

Н. Г. Четаев (1951) обосновал возможность применения функций Ляпунова для вычисления оценок качества переходного процесса в системе. Первоначально им была выведена оценка сверху для времени перехода любой возмущенной траектории линейной системы, начинающейся на сфере заданного радиуса A, внутрь наперед заданной малой сферы радиуса ε. Эта оценка получена путем рассмотрения наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции V и ее производной V' на сфере единичного радиуса. Позже им была получена оценка ([1953] 1960)

$$\sum_s x_s^2 \leqslant c \frac{\varkappa_n}{\varkappa_1} e^{(\lambda'+\varepsilon')t}$$

для квадрата радиуса сферы, в которую будет входить в момент t точка в возмущенном движении квазилинейной грубой системы при начальном условии $\sum_s x_{s0}^2 = c$. Здесь $\varkappa_1$ и $\varkappa_n$ — наибольшее и наименьшее собственные значения квадратичной формы V, ε' — достаточно малая положительная постоянная, λ' — наибольший корень уравнения

$$\left\| \frac{1}{4} \sum_\beta \left(\frac{\partial b_{r\beta}}{\partial x_s} x_\beta + \frac{\partial b_{\beta r}}{\partial x_s} x_r \right) - \lambda a_{sr} \right\| = 0, \qquad 2V' = \sum_{s,r} b_{rs} x_s x_r.$$

Общие соображения, лежащие в основе рассматриваемого метода оценок, применимы во всех случаях, когда может быть построена функция Ляпунова V и эффективно подмечена связь между оценками свойств V и V' и параметрами системы.

Метод Четаева оценок свойств систем при помощи квадратичных функций Ляпунова получил широкое распространение, и рядом исследователей были получены полезные для практики эффективные оценки скорости затухания переходного процесса в нестационарных системах.

Неасимптотическая устойчивость не является, вообще говоря, грубым свойством, что легко видеть на примерах. Е. А. Барбашин (1950—1951) доказал грубость асимптотической устойчивости для стационарных уравнений возмущенного движения в предположении непрерывной дифференцируемости функций $X_s(x)$. Грубость асимптотической устойчивости в случае периодических по времени t дифференцируемых функций $X_s(x, t)$ была показана Х. Массера. Для общего случая функций X_s грубость равномерной по $\{x_0, t_0\}$ асимптотической устойчивости показана С. И. Горшиным (1948—1949) и И. Г. Малкиным (1954). Из результатов Я. Курцвейля (1956) и Х. Массера (1956) следует грубость асимптотической устойчивости в предположении лишь непрерывности периодических функций $X_s(x, t)$. Н. Н. Красовский (1959) доказал, что некоторое свойство (А) траекторий, эквивалентное в случае асимптотической устойчивости равномерности устойчивости по t_0 и x_0, является грубым свойством; если решение $x = 0$ асимптотически устойчиво (или неустойчиво) и при этом выполняется свойство (А), то эта устойчивость (неустойчивость) является грубым свойством.

Неустойчивость не является грубым свойством уже в случае аналитических функций X_s, причем даже и в случае, когда положение равновесия $x = 0$ является изолированной особой точкой системы (9.1).

Для грубых систем возможно получение оценок порядка допустимых вариаций $R_s(x, t)$, как было указано выше.

Такие оценки для квазилинейных систем были получены Н. Н. Красовским (1959) в предположении, что функции X_s имеют непрерывные частные производные $\partial X_s/\partial x_j$, удовлетворяющие неравенствам $|\partial X_s/\partial x_j| \leqslant L$ при всех $\|x\| < \infty$. Подобные оценки возможно улучшить, если в качестве приближенной системы (9.4) брать линейную систему (9.2), для которой построение функции V особенно просто. Приемы построения функций V в подобных задачах разработаны А. М. Ляпуновым и Н. Г. Четаевым (см. § 8) и приводят к неравенствам Сильвестра, налагающим ограничения на функции X_s. Н. Н. Красовский (1954, 1957) и В. И. Зубов (1953) предложили критерий, налагающий ограничения на частные производные от функций X_s.

Теория устойчивости по первому приближению может быть полностью перенесена и на уравнения с последействием (Р. Беллман, Ann. Math., 1949, 50 : 2, и «A survey of the theory ... of linear and nonlinear differential and difference equations», 1949; Э. Райт, Amer. J. Math., 1948, 70 : 2, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1950, 63 : 1; Б. С. Разумихин, 1956; В. И. Зубов, 1957; В. Е. Гермаидзе, 1957; Н. Н. Красовский, 1959; Ю. М. Репин, 1963, и другие).

§ 10. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях

В данном А. М. Ляпуновым определении устойчивости предполагается, что возмущающих сил нет в том смысле, что возмущенные движения происходят под действием тех же внешних сил, которые учитываются при определении невозмущенного движения. Задача об устойчивости при возмущающих силах не имеет смысла, если последние ничем не стеснены. Если возмущающие силы меняются от случая к случаю так мало, что их изменение не влияет на линейные члены в правых частях уравнений возмущенного движения, возникает практически важная задача об устойчивости по первому приближению, независимо от членов выше первого порядка в функциях X_s. Эту задачу Ляпунов разрешил своими теоремами об устойчивости по первому приближению. Для случая, когда в уравнениях (9.2) p_{sr} = const и невозмущенное движение устойчиво по первому приближению, Н. Г. Четаев (1946) выяснил те свойства функций X_s в уравнениях (9.1), при которых проходит доказательство теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Он показал, что если для произвольного числа $A > 0$, как бы мало́ оно ни было, функции X_s могут быть стеснены неравенствами $|X_s| < \lambda$, где λ обозначает число, построенное по способу Ляпунова в доказательстве его теоремы об устойчивости, то невозмущенное движение будет устойчивым независимо от численных значений X_s.

Исследование устойчивости системы под действием небольших возмущающих сил, учесть которые при составлении уравнений движения практически невозможно, представляет особый интерес. При этом необходимо рассматривать возмущения не только начальных данных, но и самих уравнений движения, принимающих для возмущенного движения вид (9.3), где теперь $R_s(x_1, \ldots, x_n, t)$ обозначают некоторые неизвестные функции, характеризующие постоянно действующие возмущения, относительно которых можно сказать только, что они в каком-то смысле достаточно малы и удовлетворяют некоторым общим условиям существования решений уравнений (9.3) в окрестности рассматриваемого невозмущенного движения $x_s = 0$; функции $R_s(x, t)$ не обращаются, вообще говоря, в нуль в точке $x = 0$.

Влияние малых возмущающих сил на устойчивость движения механических систем исследовано впервые Н. Г. Четаевым (1935—1936). Он рассматривал устойчивость консервативных систем и возмущающие силы предполагал малыми силами той же физической природы, т. е. допускающими силовую функцию. Этому же вопросу посвящены работы Н. А. Артемьева (1939), Г. Н. Дубошина (1940), И. Г. Малкина (1944, 1952), С. И. Горшина (1948—1949), Н. П. Еругина (1956), Х. Массера и многих других. Наиболее распространенным является следующее определение устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Определение 8. *Невозмущенное движение — решение $x_s = 0$ уравнений (9.4) — называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для всякого положительного числа A, как бы мало оно ни было, существуют два таких других положительных числа λ_1 и λ_2, зависящих от A, что всякое решение $x_s(t)$ уравнений (9.3), удовлетворяющее при $t = t_0$ неравенству*

$$\sum_s x_{s0}^2 < \lambda_1,$$

удовлетворяет при $t > t_0$ неравенству

$$\sum_s x_s^2 < A, \tag{10.1}$$

каковы бы ни были функции $R_s(x_1, \ldots, x_n, t)$, удовлетворяющие в области (1.4) условиям

$$|R_s(x, t)| < \lambda_2. \tag{10.2}$$

В исследованиях встречаются некоторые модификации этого определения. Возможны, например, случаи, когда возмущающие силы в отдельные моменты становятся большими, оставаясь значительную часть времени достаточно малыми. В подобных случаях оказывается полезным следующее

Определение 9. *Невозмущенное движение $x_s = 0$ устойчиво при постоянно действующих возмущениях, малых в среднем на интервале T, если для всякого положительного числа A, как бы мало оно ни было, существуют два таких других положительных числа λ_1 и λ_2, зависящих от A, что всякое решение уравнений (9.3), удовлетворяющие при $t = t_0$ условию*

$$\sum_s x_{s0}^2 < \lambda_1,$$

удовлетворяет при $t > t_0$ неравенству

$$\sum_s x_s^2 < A,$$

каковы бы ни были функции $R_s(x_1, \ldots, x_n, t)$, удовлетворяющие при $t > t_0$ для всех постоянных $\alpha_s = x_s$, $\sum_s \alpha_s^2 < A$, неравенствам

$$\int_t^{t+T} |R_s(x_1, \ldots, x_n, t)|\, dt < \lambda_2. \tag{10.3}$$

И. Г. Малкин (1944) доказал, что если условие о существовании бесконечно малого высшего предела у функции V, фигурирующее в теореме II Ляпунова, заменить несколько более жестким условием ограниченности частных производных $\partial V/\partial x_s$ функции V, то невозмущенное движение устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Из результатов Я. Курцвейля (1956) и Х. Массера (1956) следует, что если невозмущенное движение (периодическое или установившееся) асимптотически устойчиво, то существует функция Ляпунова, которая обладает всеми свойствами из теоремы II Ляпунова и имеет ограниченные частные производные по переменным x_s, т. е. удовлетворяет всем условиям теоремы Малкина. Отсюда сразу следует, что для устойчивости установившихся или периодических движений при постоянно действующих возмущениях достаточно, чтобы они были асимптотически устойчивы в смысле Ляпунова; при этом предполагается, что функции $X_s(x, t)$ обладают непрерывными частными производными первого порядка.

Для частных случаев эта теорема была установлена ранее Н. А. Артемьевым (1939) и Г. Н. Дубошиным (1940).

Из результатов С. И. Горшина (1948—1949) и И. Г. Малкина (1954) следует, что в случае асимптотической устойчивости движения $x = 0$, равномерной по x_0, t_0, движение $x = 0$ устойчиво и при постоянно действующих возмущениях, в предположении, что функции X_s имеют ограниченные производные $\partial X_s/\partial x_j$.

П. А. Кузьмин (1957) рассмотрел вопрос об устойчивости при параметрических возмущениях, когда возмущающие силы имеют структуру, полностью определенную полем основных сил невозмущенных движений, и физическое происхождение возмущающих сил связывается с возмущением разнообразных физических параметров, входящих в дифференциальные уравнения движения любой материальной системы. Изложим кратко несколько более общую постановку задачи о параметрических возмущениях, принадлежащую Н. Н. Красовскому (1959). Пусть дана система уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_n, t, \beta_1, \ldots, \beta_k, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, \varphi_r(x_1, \ldots, x_n, t)), \tag{10.4}$$

правые части которой — известные функции переменных x_s, t, параметров β_i и функций φ_j. Предполагается, что параметры β_i изменяются в пределах некоторой области в k-мерном пространстве $\{\beta_i\}$, функции φ_j могут быть выбраны из некоторого семейства функций $\{\varphi_j\}$. В качестве приближенной системы для уравнений (10.4) рассматривается система уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_n, t, \beta_1^0, \ldots, \beta_k^0, \varphi_1^0, \ldots, \varphi_r^0), \tag{10.5}$$

получающаяся из (10.4) при некоторых фиксированных элементах $\{\beta_i^0\}$ и $\{\varphi_j^0\}$. Эта система рассматривается при «параметрических возмущениях»

$$R_s = X_s(x, t, \beta, \varphi) - X_s(x, t, \beta^0, \varphi^0), \tag{10.6}$$

структура которых определяется характером зависимости функций X_s от β и φ, а также семейством функций φ и допустимой областью изменения параметров β.

При учете структуры функций R_s оказывается возможным получать достаточные критерии устойчивости или неустойчивости, более близкие к необходимым, чем получаемые без учета структуры R_s. Функцию Ляпунова V следует строить таким образом, чтобы ее структура учитывала зависимость от β и φ. Если при каждом наборе β и φ из допустимых областей их изменения функция $V(x, t, \beta, \varphi)$ будет обладать в силу уравнений (10.4) нужными свойствами, то задача устойчивости будет решена.

В. Е. Гермаидзе и Н. Н. Красовский (1957) рассмотрели действие возмущений, достаточно малых в среднем. Они доказали, что если решение $x = 0$ асимптотически устойчиво равномерно по x_0, t_0, то имеет место устойчивость при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем. Задача об устойчивости при возмущениях, малых в среднем, изучалась также И. Вркочем (Чехосл. матем. ж., 1959, 9 : 1). Н. Н. Красовский (1959) показал, что при наложении на равномерно асимптотически устойчивую систему достаточно быстрых колебаний, хотя бы и не малой амплитуды, последние не могут сильно расшатать такую систему.

Были исследованы также аналогичные задачи об устойчивости для уравнений с запаздывающим аргументом (Ю. М. Репин, 1957). Е. А. Барбашин (1961) исследовал задачу об осуществлении программного движения $x_s = f_s(t)$ при импульсных возмущениях. Были изучены также некоторые задачи об устойчивости при случайных возмущениях R_s с известными вероятностными характеристиками (И. Я. Кац, Н. Н. Красовский, 1960; Р. З. Хасьминский, 1962, и другие).

Все упомянутые задачи обладают общими свойствами, а именно: 1) в практически интересных случаях эти задачи приводятся к задаче устойчивости по Ляпунову; 2) асимптотическая устойчивость движения $x_s = 0$ является достаточным условием его устойчивости при постоянно действующих возмущениях описанных типов (по крайней мере для установившихся и периодических невозмущенных движений); 3) для исследования новых задач устойчивости при различных возмущениях R_s пригодны классические методы теории Ляпунова, модернизированные в соответствии с особенностями этих задач.

К рассматриваемому кругу вопросов весьма близки задачи об оценках приближенных интегрирований, широко применяемых при исследовании прикладных задач. Разнообразные приближенные способы исследования могут рассматриваться как приемлемые лишь при возможности получения оценок их результатов по сравнению с истинным решением. Вопросы оценок приближенных методов имеют много общего с задачами об устойчивости движения и допускают применение метода функций Ляпунова (Н. Г. Четаев, 1957). Действительно, пусть тем или иным способом найдено приближенное решение

$$x_s = u_s(t) \tag{10.7}$$

системы уравнений (1.1) и требуется сравнить его с истинным решением $x_s = u_s(t) + \xi_s$ $(s = 1, \ldots, n)$. Пусть A и λ — некоторые заданные положительные постоянные.

Определение 10. *Приближение* (10.7) *имеет* (A, λ)-*оценку, если при начальных отклонениях* ξ_{s0}, *удовлетворяющих неравенству* $\sum_s \xi_{s0}^2 \leqslant \lambda$, *для всякого* $t > t_0$ *согласно уравнениям* (1.1) *будет соблюдаться условие* $\sum_s \xi_s^2 < A$.

Отклонения ξ_s удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\xi_s}{dt} = p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n + f_s,$$

где p_{sr} — некоторые непрерывные ограниченные функции t, а

$$f_s = X_s(u_1 + \xi_1, \ldots, u_n + \xi_n, t) - \frac{du_s}{dt} - \sum_j p_{sj}\xi_j.$$

Н. Г. Четаев доказал, что если функции p_{sr} таковы, что существует допускающая бесконечно малый высший предел определенно-отрицательная функция $V(\xi_1, \ldots, \xi_n, t)$, удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_s (p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n)\frac{\partial V}{\partial \xi_s} \geqslant \sum_s \xi_s^2, \qquad 1 - \sum_s \left|\frac{\partial V}{\partial \xi_s}\right| > 0$$

для всякого $t > t_0$ в области $\sum_s \xi_s^2 \leqslant A$, и если в области $\lambda \leqslant \sum_s \xi_s^2 \leqslant A$ значения функций f_s стеснены неравенствами $|f_s| < \lambda$, то имеет место (A, λ)-оценка.

Теория устойчивости при постоянно действующих возмущениях развита также для уравнений с запаздываниями времени.

§ 11. Исследование устойчивости в критических случаях

Случаи, когда решение задачи об устойчивости не может быть получено из рассмотрения уравнений первого приближения, были названы А. М. Ляпуновым критическими. Решение задачи об устойчивости было дано Ляпуновым для установившихся движений в случаях, когда характеристическое уравнение системы первого приближения имеет 1) один нулевой корень, 2) пару чисто мнимых корней, 3) два нулевых корня с одной группой решений для системы второго порядка (а также для системы ($n+2$)-го порядка, как выяснилось в 1963 г. при изучении архива А. М. Ляпунова), и для некоторых случаев периодических движений.

Теории критических случаев по Ляпунову посвящена обширная литература, непрерывно пополняемая до настоящего времени. При этом основным методом исследования критических случаев оказался второй метод Ляпунова — Четаева. Первой после Ляпунова работой в этой области была, по-видимому, работа И. Г. Малкина (1933), в которой доказана неустойчивость невозмущенного движения для системы второго порядка вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X^{(m)} + X^{(m+1)} + \ldots = X, \\ \frac{dy}{dt} &= Y^{(k)} + Y^{(k+1)} + \ldots = Y \qquad (k,\ m \geqslant 2) \end{aligned}\right\} \tag{11.1}$$

в предположении, что кривые $X=0$, $Y=0$ не имеют общих ветвей, в случаях, когда: 1) меньшее из двух чисел m и k — четное, 2) числа $m=k$ четные, если при этом система уравнений первого приближения

$$\frac{dx}{dt} = X^{(m)}, \qquad \frac{dy}{dt} = Y^{(m)}$$

не допускает интеграла вида $U(x, y) = \text{const}$, где $U(x, y)$ — знакопостоянная форма.

Первое общее решение задачи об устойчивости по формам m-го порядка в критическом случае двух нулевых корней с двумя группами решений было дано Г. В. Каменковым сначала для случая двух переменных (1935), а затем для общего случая $n+2$ переменных (1936). Было показано, что при исследовании устойчивости системы ($n+2$)-го порядка в случаях, не существенно особенных, когда вопрос об устойчивости решается по формам конечного порядка, можно перейти к эквивалентной задаче об устойчивости для системы второго порядка. Даны теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости по формам m-го порядка в случаях, когда функция

$$F_0 = xY^{(m)} - yX^{(m)}$$

является знакопеременной или знакопостоянной, и по формам не только m-го, но и сколь угодно высокого, но конечного порядка, когда функция F_0 — знакоопределенна. Например, для системы вида (11.1) доказано, что если выражение $R_0 = xX^{(m)} + yY^{(m)} < 0$ на всех решениях уравнения $F_0 = 0$, то невозмущенное движение $x = y = 0$ асимптотически устойчиво, а если $R_0 > 0$ хотя бы на одном решении уравнения $F_0 = 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Аналогичные результаты несколько иным путем были получены И. Г. Малкиным (1937), рассмотревшим, кроме того, случай, когда порядок формы больше m и правые части присоединенной системы имеют переменные коэффициенты, являющиеся ограниченными непрерывными функциями времени. В этой работе Малкин дал обобщение теоремы Ляпунова об устойчивости в особенном подслучае случая одного нулевого корня на случай k нулевых корней, когда уравнения возмущенного движения допускают семейство установившихся движений, зависящее от k произвольных постоянных. Впоследствии М. А. Айзерман и Ф. Р. Гантмахер (1957) показали, что эта теорема Ляпунова — Малкина может быть использована для исследования устойчивости положений равновесия неголономной системы.

Случай двух нулевых корней с одной группой решений при наличии присоединенной системы исследован до конца Г. В. Каменковым (1936) (решение Ляпунова было опубликовано в 1963 г.).

Фундаментальные результаты по устойчивости в критических случаях изложены в работе Г. В. Каменкова (1939). Здесь изложены результаты автора 1935—1936 гг., а также рассмотрен ряд новых случаев, в частности, случай одного нулевого и пары чисто мнимых корней характеристического уравнения, двух пар чисто мнимых корней при условии отсутствия резонанса и общий случай m нулевых корней с m группами решений, $2n$ чисто мнимых (при отсутствии резонанса) и q корней с отрицательными вещественными частями. Исследовались также аналогичные случаи для уравнений с периодическими коэффициентами. Здесь рассмотрен вопрос о возможности перехода от полной системы уравнений возмущенного движения к «укороченной», содержащей лишь критические переменные, и показано, что такой переход всегда возможен в несущественно особенных случаях при суждении об асимптотической устойчивости или неустойчивости. В случае же неасимптотической устойчивости знак производной функции V может быть изменен членами порядка, большего N. Показано также, что критическая система с m-кратным нулевым корнем, которому отвечает m групп решений, и с $2n$ чисто мнимыми корнями при отсутствии резонанса преобразуется в новую систему уравнений с $(m + n)$-кратным нулевым корнем, которому соответствует $m + n$ групп решений. Для систем с n-кратным нулевым корнем с n группами решений доказано, что для неустойчивости невозмущенного движения достаточно, чтобы хотя бы на одном вещественном нетривиальном решении системы уравнений

$$F_{sk} = x_k X_s^{(m)} - x_s X_k^{(m)} = 0$$

(для какого-либо фиксированного k и $s = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$) выполнялось неравенство $R_0 \equiv \sum_{s=1}^{n} x_s X_s^{(m)} > 0$. Доказательство этой теоремы основано на данном Г. В. Каменковым обобщении теоремы Брио и Буке, впоследствии развитом В. И. Зубовым (1957). Результаты Г. В. Каменкова по сведе́нию были развиты И. Г. Малкиным (1942), сформулировавшим свои результаты в форме первой основной теоремы о критических случаях.

Допустим, что невозмущенное движение $y_s = 0$ для «укороченной» системы

$$\frac{dy_s}{dt} = q_{s1}y_1 + \ldots + q_{sk}y_k + Y_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0) = Y_s^0(t, y_1, \ldots, y_k)$$

устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво вне зависимости от членов порядка выше N. Тогда, если разложения функций $X_j(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ начинаются членами порядка не ниже $N+1$, то и невозмущенное движение $y_s = x_j = 0$ для полной системы

$$\frac{dy_s}{dt} = q_{s1}y_1 + \ldots + q_{sk}y_k + r_{s1}x_1 + \ldots + r_{sn}x_n + Y_s(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n),$$

$$\frac{dx_j}{dt} = p_{j1}x_1 + \ldots + p_{jn}x_n + X_j(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n)$$

соответственно устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво.

Здесь Y_s и X_j — ряды по степеням y_s, x_j, сходящиеся в области $t \geqslant 0$, $|x_j| < H$, $|y_s| < H$ и начинающиеся членами не ниже второго порядка. Коэффициенты этих рядов, а также q_{si}, r_{ij} и p_{ji} — ограниченные и непрерывные функции времени. Коэффициенты p_{sj} таковы, что для системы линейных уравнений

$$\frac{dx_j}{dt} = p_{j1}x_1 + \ldots + p_{jn}x_n$$

существует определенно-положительная квадратичная форма

$$V(x, t) \geqslant a^2 \sum_s x_s^2 \qquad (a^2 = \text{const} > 0),$$

удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_s (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s} = -\sum_s x_s^2.$$

Некоторое уточнение формулировки этой теоремы сделано В. Н. Постниковым (1942). Доказательство И. Г. Малкина (1942, 1952) дано небезупречно, что отметили Н. П. Еругин и Г. В. Каменков. Во втором издании книги И. Г. Малкина (1966) неточность исправлена. Обсуждаемая теорема известна в литературе под названием «принципа сведе́ния». Для рассмотренных Ляпуновым критических случаев этот принцип фактически был им введен и играет центральную роль при изучении критических случаев всеми последующими авторами. В процессе использования принцип сведе́ния подвергся различным усовершенствованиям. В последнее время этот принцип получил весьма существенное развитие в работах В. А. Плисса (1964).

И. Г. Малкин (1951) исследовал также критические случаи двух пар чисто мнимых корней и одного нулевого и пары чисто мнимых корней для установившихся движений, причем предложенный им метод приводит к значительно более простым вычислениям, чем в методе Г. В. Каменкова. Аналогичные случаи исследованы Малкиным (1951) и для периодических движений путем преобразования уравнений возмущенного движения к такому виду, чтобы в нем члены до порядка N имели постоянные коэффициенты. При этом задача сводится к задаче критических случаев установившихся движений.

При исследовании критических случаев устойчивости периодических движений С. В. Калинин применил метод осреднения периодических коэффициентов. Этот метод был применен им к решению задачи в критических случаях одного нулевого корня (1948—1949), пары чисто мнимых корней (1957), двух нулевых корней (1959), двух пар чисто мнимых корней (1961), нескольких нулевых и чисто мнимых корней (1961). Такой способ при использовании принципа сведéния оказался эффективным и позволил решить также некоторые прикладные задачи (С. В. Калинин, 1958, 1962, 1965). С. В. Калинин (1957) также показал, что метод Ляпунова исследования критических случаев одного нулевого и пары чисто мнимых корней можно несколько видоизменить в сторону сокращения выкладок.

При исследовании случая одного нулевого корня Ляпунов предполагал правые части уравнений (1.1) возмущенного движения голоморфными функциями. В. С. Ведров (1937) обобщил результаты Ляпунова для случая, когда предполагается лишь дифференцируемость функций X_s в окрестности точки $x_s = 0$. Н. Н. Красовский (1955) показал, что в критическом случае одного нулевого корня об устойчивости можно судить также по поведению собственных чисел $\lambda_i (x_1, \ldots, x_n)$ матрицы Якоби $\| \partial X_s / \partial x_j \|$, а именно: если в некоторой окрестности точки $x_s = 0$ все собственные числа этой матрицы имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво, если же в каждой точке окрестности $x_s = 0$ имеется собственное число с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво.

Для случая системы двух уравнений аналогичные теоремы в более общих критических случаях были доказаны Н. Н. Красовским (1953) и Р. Э. Виноградом (1955).

А. М. Абаньшин (1960) исследовал случай k нулевых корней, которым отвечают $k-1$ групп решений уравнений вида (1.1) с правыми частями X_s, не зависящими явно от времени. При различных предположениях относительно структуры функций X_s он доказал ряд теорем, главным образом о неустойчивости.

Рядом авторов исследованы критические случаи трех нулевых корней с одной группой решений (М. Ятаев, Д. Курмашев, 1961; М. Ятаев, 1963; Е. Т. Софронов, 1963, 1965) и четырех нулевых корней (Г. Даиров, 1964, 1966) и установлены при некоторых предположениях теоремы об устойчивости и неустойчивости.

Задача устойчивости в критическом случае n пар чисто мнимых корней (без присоединенной системы) при условии отсутствия внутреннего резонанса исследована А. М. Молчановым (1961) по первым нелинейным формам преобразованной к специальному виду («модельная система») исходной системы уравнений возмущенного движения. Он установил теорему, согласно которой невозмущенное движение асимптотически устойчиво, если для «модельной системы» все нейтральные и неустойчивые лучи лежат вне положительного конуса $\varkappa$ ($\rho^\alpha \geqslant 0$). Лучами автор называет особенные направления «укороченной» системы; лучи соответственно устойчивы, нейтральны или неустойчивы, в зависимости от движения по лучу изображающей точки (к началу координат, неподвижна или уходит от начала координат). Кроме того, доказано, что если для «модельной системы» хотя бы один неустойчивый луч находится внутри положительного конуса $\varkappa$ ($\rho^\alpha \geqslant 0$), то невозмущенное движение неустойчиво. В случае, когда внутри положительного конуса $\varkappa$ ($\rho^\alpha \geqslant 0$) находится хотя бы один нейтральный луч, рассмотрением «модельной системы» вопрос б устойчивости не решается.

Для системы с тремя парами чисто мнимых корней при наличии присоединенной системы решение вопроса об устойчивости дано В. Г. Веретенниковым (1966). Следуя Г. В. Каменкову, автор приводит задачу к исследованию системы трех уравнений в критическом случае трех нулевых корней с тремя группами решений. Для этой системы на основании теоремы Каменкова указываются заведомо неустойчивые случаи, исключая которые автор приводит задачу к рассмотрению трех случаев, в зависимости от знака выражения R^0 на вещественных прямых $F_{sj} = 0$. Для случая, когда $R^0 < 0$, с помощью функции Ляпунова доказывается асимптотическая устойчивость невозмущенного движения по формам третьего порядка. Для случаев, когда $R^0 \geqslant 0$, дается решение задачи по формам выше третьего порядка путем построения соответствующих функций Ляпунова. Эти результаты переносятся на случай периодических движений при наличии трех пар сопряженных мнимых корней характеристического уравнения, по модулю равных единице.

Для случая пары чисто мнимых корней на двух примерах уравнении с так называемыми симметричными нелинейностями Л. А. Длугач (1965) применил интересный способ исследования устойчивости путем замены правых частей уравнений их наилучшими (по Чебышеву) линейными приближениями, причем критический случай перестает быть таковым.

В одной из последних работ Г. В. Каменкова (1965) завершено исследование критического случая двух нулевых корней с двумя группами решений, начатое автором в 1934 г. Здесь исследован случай, когда на прямых, определяемых решением уравнения

$$F_0 = xY^{(m)} - yX^{(m)} = 0,$$

выражение

$$R_0 \equiv xX^{(m)} + yY^{(m)} = 0,$$

т. е. когда вопрос об устойчивости не решается формами m-го порядка. Доказан ряд теорем об устойчивости как по формам $(m + 1)$-го, так и более высокого конечного порядка. Показано также, что критический случай пары равных по модулю единице корней характеристического уравнения для периодических движений, исследованный Ляпуновым лишь для иррационального $\lambda\omega/\pi$, приводится в случае рационального $\lambda\omega/\pi$ к случаю двух нулевых корней с двумя группами решений.

Последние работы Каменкова (1966—1967) посвящены исследованию устойчивости периодических движений. Здесь доказана общая теорема о том, что задача об устойчивости периодических движений в случаях, несущественно особенных, всегда приводится к задаче об устойчивости равновесия. Анализируются различные случаи, которые могут при этом представиться. Если среди корней характеристического уравнения имеются по модулю равные единице и выполняются условия отсутствия резонанса в числах до порядка N включительно, то подсистема с $2p$ переменными, соответствующая этим корням, преобразуется в подсистему с p нулевыми корнями с p группами решений. Если же условия отсутствия резонанса не выполняются, то каждой паре мнимых сопряженных корней соответствует в преобразованной системе два нулевых корня. Каменков (1967) обобщает свои ранее полученные результаты по принципу сведе́ния на системы с периодическими коэффициентами, а также на системы с произвольными непрерывными и ограниченными коэффициентами. Разработанный Каменковым принцип сведе́ния основан на существовании для «укороченной» системы функций Ляпунова или Четаева, вследствие чего он применим в случаях асимптотической устойчивости или неустойчивости по формам N-го порядка. Каменков доказал также теорему об устойчивости в существенно особенных случаях.

В нескольких работах (М. С. Сагитов, А. Н. Филатов, 1965; Нго Ван Вьонг, 1966, ПММ, 30 : 4; М. С. Сагитов, 1966) рассматривается вопрос о неустойчивости для системы вида

$$x_i' = y_i + X_i, \quad y_i' = Y_i, \quad z_s' = \sum_k p_{sk} z_k + Z_s \qquad (i = 1, \ldots, m; \; s = 1, \ldots, n)$$

при частных предположениях относительно структуры функций X_i, Y_i, Z_s.

С теорией критических случаев устойчивости тесно связан вопрос о поведении динамических систем вблизи границ области устойчивости в пространстве параметров. Границей области устойчивости называется совокупность всех тех точек пространства параметров, в которых по крайней мере один из корней характеристического уравнения является критическим. Так, для линейной системы уравнений возмущенного движения с постоянными коэффициентами устойчивость может теряться либо когда по меньшей мере один из корней характеристического уравнения становится равным нулю, либо когда два корня становятся чисто мнимыми; в этих случаях уничтожаются либо последний, либо предпоследний из определителей Гурвица. В первом случае уравнения возмущенного движения будут иметь новую последовательность равновесий, проходящую через отвечающую точку, а во втором — последовательность периодических движений (Н. Г. Четаев, 1946).

Когда уравнения возмущенного движения нелинейны, вопрос о существовании периодических движений рассматривали А. А. Андронов (1937) для уравнений второго порядка и П. А. Кузьмин (1939) для уравнений второго и третьего порядков, а вопросы о поведении траекторий как в области точек бифуркации, так и в точках ответвления периодических орбит исследовал Н. Н. Баутин (1950). Последний показал, что в рассматриваемых случаях поведение динамической системы вблизи границы области устойчивости определяется ее поведением на самой границе. Те границы области устойчивости, на которых невозмущенное движение устойчиво, называют «безопасными», а те границы, на которых оно неустойчиво,— «опасными». Нахождение «опасных» и «безопасных» границ сводится к решению задачи устойчивости в критических случаях. Впоследствии эти результаты были развиты в работах ряда авторов (А. И. Лурье, 1951; И. Г. Малкин, 1952, и другие).

К рассматриваемому кругу вопросов близки задачи устойчивости в случаях, близких к критическим, когда характеристическое уравнение наряду с корнями с отрицательными вещественными частями имеет, по крайней мере, один корень с малой положительной или отрицательной вещественной частью (Г. В. Каменков, 1963). Для этих случаев дано определение устойчивости, ослабляющее требования определения Ляпунова к величинам начальных возмущений. Для систем второго порядка исследованы вопросы существования и устойчивости предельных циклов.

Используя метод Чаплыгина приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, Г. И. Мельников (1963—1965) исследовал характер затухания переходного процесса в случаях одного нулевого и пары чисто мнимых корней, и близких к этим. Г. А. Кузьмин (1967) исследовал случаи: 1) двух малых по модулю комплексно сопряженных корней и 2) одного нулевого и пары комплексно-сопряженных корней с малой положительной вещественной частью

Теория критических случаев для уравнений с запаздываниями времени развивается успешно С. Н. Шимановым (1953), причем за исходный пункт им принято рассмотрение этих уравнений как операторных уравнений в функциональном пространстве. Шиманов предложил практические приемы построения «функциональных» интегралов систем с запаздываниями и указал приемы вычисления функций, определяющих устойчивость или неустойчивость систем.

§ 12. Об устойчивости движения на конечном интервале времени *)

В определении 1 устойчивости по Ляпунову предполагается неограниченный полуинтервал изменения времени $t \geqslant t_0$, а также зависимость числа λ, определяющего область возможных начальных возмущений, от числа A.

Во многих инженерных задачах требуется удовлетворить выписанным в определении 1 устойчивости неравенствам (1.3) и (1.4) при заданных значениях λ, A за ограниченный промежуток времени от начального момента времени t_0 до некоторого момента T. Так возникает задача об устойчивости в конечном на конечном интервале времени.

Этой задачей, начиная с тридцатых годов, занимался ряд ученых. Постановка задачи, как и первые результаты в этой области, принадлежат Н. Г. Четаеву (1934—1935, 1940), показавшему тесную связь прямого метода Ляпунова исследования устойчивости движения с мыслью А. Пуанкаре о применении характеристик Кронекера для качественного изучения дифференциальных уравнений. Разработанный Четаевым (1936, 1938) метод изменения функций для вычисления характеристик Кронекера позволяет в ряде случаев решить задачу об устойчивости в конечном за ограниченный промежуток времени.

Задачей об устойчивости в конечном за ограниченный промежуток времени при наличии возмущающих сил занимался Н. Д. Моисеев (1945, 1949), давший подобной устойчивости термин «техническая» (1946). В его работах (1945—1946) приведено определение технической устойчивости и исследованы некоторые простые системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, встречающиеся в теории регулирования. Вопрос технической устойчивости решается их интегрированием с последующей грубой оценкой квадратур. В некоторых случаях вычисления упрощаются благодаря приобщению отдельных членов к возмущающим силам. В результате этого условия устойчивости, естественно, огрубляются.

В другой работе Н. Д. Моисеев (1949) привлекает к решению задачи технической устойчивости неравенство Боля (1900) и дает некоторые его обобщения. Неравенство Боля относится к решениям системы дифференциальных уравнений, правые части которых удовлетворяют условиям Липшица. Полученные критерии технической устойчивости, определяющиеся только константами Липшица, просты для расчета, но весьма грубы.

Н. Г. Четаев (1949, 1960) дал постановку задачи о (λ, A, t_0, T)-устойчивости, получающуюся из постановки первой задачи Ляпунова при фиксированных заданных значениях величин λ, A, t_0, T. Четаев отметил, что задачи об устойчивости в конечном за ограниченный промежуток времени при действии подходящим образом стесненных возмущающих сил можно в известном смысле накрыть некоторой задачей об

*) § 12 написан совместно с С. Я. Степановым.

устойчивости в смысле Ляпунова. При этом, если требуется, возможно изменять правые части дифференциальных уравнений соответственным образом в областях

$$\sum_s x_s^2 < \lambda, \qquad A < \sum x_s^2 \leqslant H$$

для всякого $t \geqslant t_0$ и в области

$$\lambda \leqslant \sum_s x_s^2 \leqslant A$$

для значений $t > T$, так как в задаче Ляпунова за начальный момент времени можно выбрать любой момент времени на интервале (t_0, T). Необходимо только, чтобы для преобразованных уравнений функции Ляпунова обладали оговоренными у Ляпунова свойствами, начиная с заданного t_0, и чтобы для заданного числа A получаемое по методу Ляпунова число λ превышало или равнялось заданной для λ величине. Это обстоятельство, как подчеркнул Четаев, делает прямой метод Ляпунова весьма ценным для тех из прикладных задач об устойчивости в конечном за ограниченный промежуток времени, для которых существует накрытие задачей Ляпунова. Четаев отметил также, что не всякая задача о (λ, A, t_0, T)-устойчивости при возмущающих силах может быть накрыта задачей Ляпунова.

Некоторые соображения по вопросу о накрытии задачей Ляпунова задачи о (λ, A, t_0, T)-устойчивости высказаны А. М. Летовым (1962). В целом этот метод ждет дальнейшей разработки. Н. Г. Четаевым (1949) отмечена также возможность решения задачи о (λ, A, t_0, T)-устойчивости путем использования полученных им неравенств для функций Ляпунова. Рассматривая экстремальные значения функции $2V' = \sum_{s,r} h_{sr}x_s x_r$, где $h_{sr} = -\delta_{sr} + {}^1/_2\varepsilon \sum_i (\alpha_{ri}f_{is} + \alpha_{si}f_{ir})$, представляющей собой производную от функции Ляпунова $2V = \sum_{s,r} \alpha_{sr}x_s x_r$ для системы вида (9.2), где $p_{sr} = c_{sr} + \varepsilon f_{sr}$, на поверхности $V = e$, автор получает неравенства

$$V_0 \exp \int_{t_0}^{t} \lambda_1 \, dt \leqslant V \leqslant V_0 \exp \int_{t_0}^{t} \lambda' \, dt, \tag{12.1}$$

где λ_1 и λ' — наименьший и наибольший корни уравнения

$$\| 2h_{sr} - \alpha_{sr}\lambda \| = 0.$$

Пусть V — определенно-положительная квадратичная форма, c — точный максимум V на сфере $\sum_s x_s^2 = \lambda$, C — точный низший предел V на сфере $\sum_s x_s^2 = A$. Тогда $|V_0| \leqslant c$ и для (λ, A, t_0, T)-устойчивости достаточно удовлетворить неравенству

$$C > c \exp \int_{t_0}^{t} \lambda' \, dt \tag{12.2}$$

для всякого t на интервале $[t_0, T]$.

Неравенства вида (12.1) применены Четаевым также при параметрическом рассмотрении уравнений вида (9.2) с переменными коэффициентами $p_{sr}(t)$ и могут быть использованы для задач о (λ, A, t_0, T)-устойчивости. Указанные неравенства имеют общий характер и справедливы при произвольной функции V безотносительно к знакоопределенности производной. Например, в той же работе (1949) Четаев применяет это неравенство с определенно-положительной квадратичной формой $V = \sum_s x_s^2$ для вычисления высшего и низшего пределов характеристичных чисел решений системы уравнений вида (9.2). Неравенство с такой функцией V впоследствии было применено также к решению задач (λ, A, t_0, T)-устойчивости (Чжан Сы-ин, ПММ, 1959, 23 : 4).

Дальнейшие исследования других авторов касались главным образом линейных дифференциальных уравнений возмущенного движения вида (9.2), применительно к которым давались различные модификации неравенств Четаева.

Приведением квадратичной формы V к каноническому виду по методу Якоби А. Д. Горбунов (1950) и Б. С. Разумихин (1957) из неравенства (12.1) вывели оценку

$$|x_s| \leqslant \sqrt{V_0 \frac{\Delta_{n-1}^{(s)}}{\Delta_n}} \exp \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} \lambda' \, dt. \tag{12.3}$$

Здесь Δ_n — дискриминант квадратичной формы V, а $\Delta_{n-1}^{(s)}$ — минор, получающийся вычеркиванием из последнего столбца и строки с номером s. В последующих работах Горбунов (1952, 1954) распространил оценку (12.3) вариацией произвольных постоянных на системы с возмущающими силами (в правых частях уравнений (9.2) добавляются слагаемые $f_s(t)$). Чжан Сы-ин (1959) с помощью неравенства Гельдера несколько упростил подобную оценку. К. А. Карачаров и А. Г. Пилютик (1962) также несколько упростили оценки такого вида, используя неравенства для миноров $\Delta_{n-1}^{(s)}$. Кроме того, в их работе все указанные оценки систематизированы, особо разобран случай $V = \sum_s a_s(t)\, x_s^2$ и рассмотрены некоторые примеры. Для неравенств Четаева дается вывод, основанный на экстремальных свойствах регулярного пучка квадратичных форм.

Этому же вопросу посвящена работа С. К. Персидского (1959), который вывел оценку вида (12.3) для случая, когда нелинейные члены (возмущающие силы) ограничены по модулю величиной $\alpha \,\|x\|^{1+\beta}$ $(\alpha, \beta > 0)$.

В работе А. Г. Пилютика и П. А. Талалаева (1965) приводятся некоторые соображения о преимуществах неравенств Четаева вида (12.1) по сравнению с другими оценками и дается способ построения квадратичной формы V. Функция V строится по методу Ляпунова как решение уравнения

$$\sum_s \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = \sum_s u_{ss}(t)\, x_s^2.$$

Для выбора $u_{ss}(t)$ предлагается некоторое правило, преимущество которого в сравнении с выбором $u_{ss}(t) = -1$ демонстрируется на примере.

Иной смысл вложили в понятие устойчивости на конечном интервале времени Г. В. Каменков (1953) и А. А. Лебедев (1954). Различные варианты определения устойчивости на конечном интервале времени, данные в их работах, резюмированы в совместной статье авторов (1954).

О п р е д е л е н и е 11. *Невозмущенное движение устойчиво на конечном интервале времени* $[t_0, t_0+\tau]$, *если в пространстве* $(x_1, \ldots, x_n)$ *может быть указан цикл* $V(x_1, \ldots, x_n, t) = A$, *обладающий на этом интервале следующими свойствами*:

1) *диаметр* $D(t)$ *области*

$$V(x_1, \ldots, x_n, t) \leqslant A \tag{12.4}$$

не превышает начальный диаметр $D(t_0)$;

2) *при всяких начальных возмущениях* x_{s0}, *удовлетворяющих условию*

$$V(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0) \leqslant A,$$

возмущения $x_s(t)$ *удовлетворяют неравенству* (12.4).

Г. В. Каменков (1953) определяет область (12.4) под видом

$$\sum_{s=1}^{n} y_s^2 = \sum_{s=1}^{n} (a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n)^2 \leqslant A, \qquad \det\|a_{ij}\| \neq 0.$$

Постоянные a_{ij} выбираются так, чтобы в переменных $y_1, \ldots, y_n$ уравнения возмущенного движения (в первом приближении) имели в момент времени t_0 канонический вид, т. е. чтобы была жордановой матрица

$$\|a_{ij}\|\cdot\|p_{ij}(t_0)\|\cdot\|a_{ij}\|^{-1}. \tag{12.5}$$

Промежуток времени τ в этой работе заранее не задается и поэтому термин «устойчивости на конечном интервале времени» здесь не совсем оправдан.

Решение такой задачи возможно на основании исследования одной матрицы $\|p_{ij}(t_0)\|$. В зависимости от свойств корней характеристического уравнения $\|p_{ij}(t_0) - \delta_{ij}\lambda\| = 0$ Каменков указал все случаи, когда вопрос о наличии или отсутствии устойчивости в указанном смысле не зависит от членов выше первого порядка малости. В случае устойчивости Каменков указал способ определения оценки снизу для величины интервала τ, отметив при этом, что эта оценка не определяет максимального значения времени t, гарантирующего соблюдение неравенства (12.4).

А. А. Лебедев (1954) изменил определение Каменкова, предположив числа A и τ заданными, и на основании предложенной Каменковым оценки для τ сформулировал теорему, предполагая для большей общности наличие возмущающих сил специального вида (возмущающие силы не превосходят $\varepsilon(|x_1| + \ldots + |x_n|)$). Такое определение устойчивости близко к определению (λ, A, t_0, T)-устойчивости при $\lambda = A$.

Для улучшения оценки Каменкова Лебедев предложил для момента времени $t_0+\tau$ снова рассматривать задачу об устойчивости на конечном интервале времени. «Стыковка» этих двух задач возможна лишь при специальных ограничениях, когда возмущения достаточно быстро уменьшаются со временем. Связано это с тем, что для новой задачи, отвечающей моменту $t_0+\tau$, область (12.4) по виду отлична от таковой для момента t_0. Это обстоятельство ограничивает применение такого способа продолжения интервала τ. Чтобы обойти указанные препятствия, Лебедев (1954) положил коэффициенты a_{ij} переменными, чтобы матрица (12.5) была жордановой для каждого момента времени из интервала $[t_0, t_0+\tau]$. Такое определение имеет смысл, по-видимому, когда $p_{ij}(t)$ меняются либо мало, либо медленно. Полученные в этой работе результаты представляют оценки возмущений, аналогичные неравенству Четаева (12.1).

К этому кругу исследований относятся также работы В. И. Зубова (1958), В. Г. Штелика (1958), В. П. Рудакова (1962—1963). Во всех этих работах исследуются линейные системы вида (9.2) с непрерывными коэффициентами $p_{sr}(t)$; в правых частях допускается также наличие членов выше первого порядка малости. В предположении, что диаметр $D(t)$ области (12.4) достаточно мал, авторы дают различные независимые от членов высшего порядка теоремы об устойчивости по первому приближению.

В. И. Зубов (1958) строит входящую в (12.4) функцию $V(x)$ по методу Ляпунова:

$$\sum_s \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}(t_0)x_1 + \ldots + p_{sn}(t_0)x_n) = W(x),$$

где $W(x)$ — определенно-отрицательная квадратичная форма. В результате получаются достаточные условия (вещественные части корней характеристического уравнения $\lambda_s(t_0)$ — отрицательные) устойчивости на конечном интервале времени, отличные от условий Каменкова.

В. Г. Штелик (1958), рассматривая область V в виде (12.4), выбирает коэффициенты a_{sr} так, чтобы в матрице (12.5) на диагонали стояли корни характеристического уравнения $\lambda_s(t_0)$ (комплексные; среди них могут быть и равные), а недиагональные члены были меньше наперед заданного числа η (И. Г. Петровский, 1938). Это дает упрощенные оценки решений и промежутка времени τ.

Оценка Каменкова для промежутка времени τ была улучшена В. П. Рудаковым (1962) благодаря применению неравенства Четаева. А именно, устойчивость в смысле Каменкова на интервале времени $[t_0, t_0+\tau]$ гарантируется условиями

$$\lambda'(t_0) < 0, \qquad \int_{t_0}^{t} \lambda'(t)\,dt < 0 \quad \text{при} \quad t_0 < t \leqslant t_0 + \tau.$$

Условие Каменкова эквивалентно более жесткому требованию

$$\lambda'(t) < 0 \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau.$$

Р. М. Насыров (1964—1966) исследовал устойчивость движения на конечном интервале времени в смысле Каменкова в некоторых критических случаях.

Ж. Ла-Салль и С. Лефшец (1961) проводят рассуждения, аналогично Четаеву (1949, 1960), для общего случая уравнений (1.1). Они показали, что если существует такая функция V, что $V \leqslant l_0$ в некоторой области (λ) и $V \geqslant l$ вне (A), то выполнение в (A) неравенства

$$V' \leqslant (l - l_0)/(T - t_0)$$

гарантирует (λ, A, t_0, T)-устойчивость невозмущенного движения. В качестве примера исследуется уравнение Ван-дер-Поля.

К задаче о (λ, A, t_0, T)-устойчивости близки задачи конечной устойчивости на бесконечном интервале времени, ограниченности решений дифференциальных уравнений, задача оценки точности приближенных интегрирований.

В данном очерке рассмотрены лишь некоторые направления многообразных исследований советских ученых по развитию и приложению метода функций Ляпунова в теории устойчивости движения. Вместе с тем следует подчеркнуть, что этот метод нашел разнообразные и широкие приложения и в других областях науки — в бурно развивающейся в последние годы теории оптимального управления и стабилизации, в теории нелинейных колебаний, в общей качественной теории дифференциальных уравнений и т. п. Некоторые из приложений метода освещаются в последующих очерках настоящего тома, в особенности в очерке Н. Н. Красовского (стр. 179—243). Метод функций Ляпунова оказался весьма эффективным во многих разделах науки, и нет сомнения, что и в дальнейшем он будет развиваться и находить все новые области приложений, являясь мощным средством количественного и качественного исследования.