ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТОВ НЕКОТОРОГО ВИДА

В. В. Румянцев
(Москва)

Статья [1] содержит исследование устойчивости некоторых движений тяжелого гиростата с одной неподвижной точкой¹. В данной работе изучается устойчивость движений тяжелых гиростатов специального вида, опирающихся на неподвижную горизонтальную плоскость.

1. Пусть гиростат представляет собой твердое тело S_1, с которым неизменно связана ось вращения симметричного твердого тела (ротора) S_2. Будем предполагать, что эта ось совпадает с осью вращения центрального эллипсоида инерции тела S_2. Уравнение его движения относительно первого тела запишем в форме уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial \alpha'} - \frac{\partial T_2}{\partial \alpha} = Q \tag{1.1}$$

Здесь T_2 — кинетическая энергия тела S_2 в его движении по отношению к неподвижной системе осей координат $\xi\eta\zeta$; α— угол между двумя плоскостями, проходящими через ось вращения, одна из которых неподвижна относительно S_1, а вторая — относительно S_2, Q — обобщенная сила, отвечающая координате α.

По теореме Кенига

$$2T_2 = m_2\mathbf{v}_2^2 + A_2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + C_2(\omega_3 + \alpha')^2$$

где m_2, $A_2 = B_2$, C_2 — масса и главные центральные моменты инерции тела S_2; $\mathbf{v}_2$ — вектор скорости его центра тяжести O_2; ω_i $(i = 1, 2, 3)$ — проекции на главные центральные оси инерции тела S_2 мгновенной угловой скорости тела S_1 в его движении по отношению к неподвижной системе осей координат. Уравнение (1.1) принимает вид

$$C_2(\omega_3' + \alpha'') = Q \tag{1.2}$$

Предположим, что на ротор не действуют никакие силы, кроме сил давления тела S_1 на концы его оси. В этом случае $Q = 0$, и из уравнения (1.2) немедленно получаем первый интеграл

$$\omega = \omega_3 + \alpha' = \text{const} \tag{1.3}$$

выражающий постоянство проекции на ось вращения ротора его мгновенной угловой скорости в движении относительно неподвижной системы осей координат [2].

Момент количеств движения $\mathbf{G}$ гиростата S относительно какой-либо точки равен геометрической сумме моментов количеств движения твердых тел S_1 и S_2. Момент количеств движения тела S_2 относительно его центра тяжести O_2 равен

$$A_2\mathbf{e} + C_2\omega\mathbf{k} \qquad (\mathbf{e}^2 = \omega^2{}_1 + \omega_2{}^2)$$

Здесь $\mathbf{k}$ обозначает единичный вектор оси ротора, $\mathbf{e}$ — экваториальную составляющую его мгновенной угловой скорости.

Следуя Жуковскому [2], введем в рассмотрение преобразованное твердое тело, полученное присоединением к телу S_1 материальной бесконечно тонкой палочки массы m_2 с центром тяжести в точке O_2, направленной по оси ротора и имеющей относительно перпендикулярной оси, проходящей через точку O_2, момент инерции A_2. Очевидно, вектор $\mathbf{G}$ равен сумме векторов $C_2\omega\mathbf{k}$ и момента количеств движения преобразованного тела. Если некоторую точку O тела S_1 принять за начало системы координат $Oxyz$ с осями, направленными по главным осям инерции преобразованного тела для его точки O, то проекции вектора $\mathbf{G}$ на эти оси представятся в виде

$$G_x = Ap + k_1, \qquad G_y = Bq + k_2, \qquad G_z = Cr + k_3 \tag{1.4}$$

¹ Пользуюсь случаем отметить, что в работе [1] на стр. 11, пятнадцатую строку сверху вместо $K_i = \text{const}$ следует читать $k_i = \text{const}$.

Здесь A, B, C — моменты инерции преобразованного тела, p, q, r — проекции вектора мгновенной угловой скорости тела S_1, k_i ($i = 1, 2, 3$) — проекции на подвижные оси вектора $C_2\omega\mathbf{k}$. Отсюда следует, что, если гиростат S имеет неподвижную точку O, то уравнения его движения под действием силы тяжести имеют вид уравнений (1.1) работы [1] и все результаты [1] исследования устойчивости движения гиростата для случая $k_i = \text{const}$ непосредственно применимы, с учетом введенных обозначений, к твердому телу S_1 с присоединенным к нему ротором S_2.

2. Рассмотрим движение гироскопа Жерва, или эквилибристической стойки [3], на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости под действием силы тяжести.

Этот прибор состоит из тела S_1, представляющего собой оправу ABC, имеющую форму полукруга, обращенного выпуклостью вниз, жестко соединенную с ножкой BDE, и симметричного ротора S_2, ось которого находится в подшипниках A и C оправы. Ножка BDE, часть DE которой прямолинейна и перпендикулярна к плоскости полукруга ABC, служит для того, чтобы прибор можно было поставить на горизонтальную плоскость. Средняя плоскость ротора проходит через DE, его центр тяжести O_2 находится на оси AC в плоскости, проходящей через DE перпендикулярно к AC.

Если ротор не вращается, то вертикальное положение равновесия прибора неустойчиво; если же ротор вращается достаточно быстро, то прибор находится в устойчивом равновесии. Теория этого прибора развита Карвалло в предположении, что тело S_1 не имеет массы; учет последней значительно усложняет теорию.

Пусть $\xi\eta\zeta$ — неподвижная система осей координат, оси ξ и η которой расположены в горизонтальной плоскости, а ось ζ направлена вертикально вверх. С телом S_1 свяжем неизменно систему осей координат $Oxyz$ с началом в центре тяжести O прибора, расположенным на прямой BO_2. Прямую OO_2, направленную вверх, примем за ось y, ось x проведем перпендикулярно к Oy в средней плоскости ротора и ось Oz — перпендикулярно к x и y так, чтобы образовалась правая тройка осей. Очевидно, ось z параллельна оси ротора AC.

Предположим, что оси xyz будут главными центральными осями инерции преобразованного твердого тела. Кроме того, введем в рассмотрение систему координат $Ox_1y_1z_1$ с осями, соответственно параллельными неподвижным осям $\xi\eta\zeta$. Координаты центра масс O прибора обозначим через ξ, η, ζ, угол между осями z_1 и z — через θ, угол между x_1 и x — через ψ. Через l обозначим длину перпендикуляра OP, опущенного из точки O на основание ножки DE; очевидно

$$\zeta = l \sin\theta \tag{2.1}$$

Проекции мгновенной угловой скорости тела S_1 на оси xyz равны соответственно

$$p = \theta', \quad q = \psi' \sin\theta, \quad r = \psi' \cos\theta \tag{2.2}$$

Так как силы, действующие на прибор — его вес Mg и нормальная реакция плоскости N, — вертикальны, то горизонтальная проекция Q точки O совершает равномерное прямолинейное движение; далее будем предполагать без уменьшения общности, что точка Q остается неподвижной.

Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = C_2\omega$, из общих теорем механики имеем интегралы энергии

$$M\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Mg\zeta = h \tag{2.3}$$

и площадей

$$Bq\sin\theta + (Cr + C_2\omega)\cos\theta = k \tag{2.4}$$

Здесь M обозначает массу прибора, g — ускорение силы тяжести, h и k — произвольные постоянные.

Подставляя в (2.3) и (2.4) вместо p, q, r, ζ их выражения по формулам (2.1) и (2.2) и исключая ψ', получим уравнение

$$(b + e\cos^2\theta)(1 + c\cos^2\theta)\,\theta'^2 = (\alpha - a\sin\theta)(1 + c\cos^2\theta) - (\beta - c_2\omega\cos\theta)^2 \tag{2.5}$$

Здесь

$$a = \frac{2Mgl}{B}, \quad b = \frac{A}{B}, \quad c = \frac{C-B}{B}, \quad c_2 = \frac{C_2}{B}, \quad e = \frac{Ml^2}{B}, \quad \alpha = \frac{h}{B}, \quad \beta = \frac{k}{B}$$

Уравнение (2.5) можно проинтегрировать, в результате чего получим выражение для t в виде гиперэллиптического интеграла от θ. После обращения этого интеграла вычисление углов ψ и α сведется к квадратурам, так как

$$\psi' = \frac{\beta - c_2\omega\cos\theta}{1 + c\cos^2\theta}, \qquad \alpha' = \omega - \psi'\cos\theta$$

Можно было бы также найти кривую, описываемую на горизонтальной плоскости точкой P основания DE ножки прибора [3].

3. Рассмотрим гиростат S, отличающийся от описанного в п. 2 только конструкцией ножки. Пусть ножка оправы гиростата имеет плоскую ножевую опору в форме кругового сегмента [4] радиуса a с центром на оси Oy в точке O_1; координату этой точки по оси Oy обозначим через a_1. Благодаря такой конструкции ножки прибор получает еще одну степень свободы и может качаться около оси, лежащей в горизонтальной плоскости перпендикулярно к хорде кругового сегмента.

Положение системы осей координат $Oxyz$, жестко связанных с прибором, относительно осей $Ox_1y_1z_1$ будем теперь определять тремя углами Эйлера ϑ, ψ, φ. В этом случае вместо формул (2.1) и (2.2) будем иметь

$$\zeta = a\sin\theta - a_1\sin\theta\cos\varphi \tag{3.1}$$

$$p = \psi'\sin\theta\sin\varphi + \theta'\cos\varphi, \quad q = \psi'\sin\theta\cos\varphi - \theta'\sin\varphi, \quad r = \varphi' + \psi'\cos\theta \tag{3.2}$$

Интеграл энергии сохраняет свой вид (2.3), а интеграл площадей запишется в виде

$$Ap\sin\theta\sin\varphi + Bq\sin\theta\cos\varphi + (Cr + C_2\omega)\cos\theta = \text{const} \tag{3.3}$$

Исследуем устойчивость вертикального положения равновесия гиростата, определяемого следующими значениями переменных:

$$\theta = {}^1/_2\pi, \quad \theta' = 0, \quad \psi = \text{const}, \quad \psi' = 0, \quad \varphi = \varphi' = 0, \qquad \omega = \text{const} \tag{3.4}$$

В возмущенном движении положим

$$\theta = {}^1/_2\pi + \theta_1$$

а для остальных переменных сохраним прежние обозначения.

Тогда интегралы (2.3) и (3.3) с учетом уравнений (3.1) и (3.2) для возмущенного движения примут следующий вид:

$$V_1 = A\theta_1'^2 + B\psi'^2 + C\varphi'^2 + Mg(a_1\varphi^2 - l\theta_1^2) + \ldots = \text{const}$$

$$V_2 = (A - B)\theta_1'\varphi + B\psi' - (C\varphi' + C_2\omega)\theta_1 + \ldots = \text{const} \tag{3.5}$$

Здесь $l = a - a_1$, а многоточия обозначают невыписанные члены третьего и более высоких порядков малости. Рассмотрим функцию

$$V = V_1 + \lambda V_2^2 = A\theta_1'^2 + C\varphi'^2 + Mga_1\varphi^2 +$$

$$+ B(1 + \lambda B)\psi'^2 - 2\lambda BC_2\omega\theta_1\psi' + (C_2^2\omega^2\lambda - Mgl)\theta_1^2 + \ldots \tag{3.6}$$

где λ — некоторая постоянная.

Согласно критерию Сильвестра, для определенной положительности функции V по отношению к рассматриваемым переменным необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$1)\quad 1 + \lambda B > 0, \qquad 2)\quad \lambda(C_2^2\omega^2 - BMgl) - Mgl > 0, \qquad 3)\quad a_1 > 0$$

Очевидно, эти неравенства всегда могут быть удовлетворены соответствующим выбором величины $\lambda > 0$, если

$$a_1 > 0, \qquad C_2^2\omega^2 - BMgl > 0 \tag{3.7}$$

При выполнении условий (3.7) функция V будет определенно положительной, а производная по времени от нее в силу уравнений возмущенного движения равна нулю, т. е. функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости.

Таким образом, условия (3.7) будут достаточными условиями устойчивости невозмущенного движения (3.4) гиростата по отношению к переменным $\theta, \theta', \psi', \varphi, \varphi'$. Отметим, что в силу существования интеграла (1.3) движение (3.4) при этом устойчиво также и по отношению к переменной α'.

Нетрудно видеть, что неравенства (3.7) будут также необходимыми условиями устойчивости вертикального положения равновесия гиростата. В самом деле, рассмотрим уравнения в вариациях для возмущенного движения

$$A\theta_1'' + C_2\omega\psi' = Mgl\theta_1, \qquad B\psi'' - C_2\omega\theta' = 0$$

Характеристическое уравнение для этих уравнений

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 (AB\lambda^2 + C_2^2\omega^2 - BMgl) = 0$$

в случае $C_2^2\omega^2 - BMgl < 0$ имеет корень с положительной вещественной частью, что и доказывает неустойчивость невозмущенного движения в этом случае.

Условие $a_1 > 0$ означает, что геометрический центр опорного кругового сегмента должен находиться выше центра тяжести прибора. Это необходимо и достаточно для устойчивости качаний гиростата около оси, лежащей в плоскости основания перпендикулярно к хорде сегмента [4].

Второе из условий (3.7) позволяет определить наименьшую угловую скорость вращения ω ротора S_2, при которой гиростат устойчив.

Интересно отметить, что если сравнить это условие с условием Майевского устойчивости вращения гироскопа

$$C^2\omega^2 - 4AMgl > 0$$

то, как видно, для устойчивости равновесия гиростата требуется, при прочих равных условиях, вдвое меньшая угловая скорость вращения ротора, нежели для устойчивости гироскопа.

4. Перейдем к изучению устойчивости движения гиростата, представляющего собой твердое тело S_1 со сферическим основанием, опирающимся на горизонтальную плоскость, с которым неизменно связана ось вращения симметричного ротора S_2. Тело S_1 может быть, например, полым шаром; примером такого гиростата является, в частности, гироскопический шар Бобылева [5]. Будем предполагать, что сферическое основание тела S_1 касается опорной плоскости только одной своей точкой P. Пусть геометрический центр O_1 сферического основания тела S_1 не совпадает с центром тяжести O гиростата. Последний примем за начало подвижной системы осей координат $Oxyz$, совмещенных с главными осями центрального эллипсоида инерции преобразованного тела, предполагаемого эллипсоидом вращения вокруг оси Oz. Пусть точка O_1 находится на оси Oz, ее координату по этой оси обозначим через a_1, радиус сферического основания — через a.

Предположим также, что ось ротора S_2 совпадает с осью Oz.

Уравнения движения тяжелого гиростата на неподвижной горизонтальной плоскости получим из общих теорем механики. По теореме о движении центра тяжести системы будем иметь следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} + qw - rv = X - g\gamma_1 \\ &\frac{dv}{dt} + ru - pw = Y - g\gamma_2 \\ &\frac{dw}{dt} + pv - qu = Z - g\gamma_3 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь u, v, w обозначают проекции на подвижные оси вектора скорости центра тяжести O гиростата; X, Y, Z — отнесенные к единице массы гиростата проекции реакции неподвижной плоскости в точке опоры P; направляющие косинусы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ оси ζ относительно осей x, y, z удовлетворяют уравнениям Пуассона

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2 \tag{4.2}$$

По теореме о моменте количеств движения системы по отношению к ее центру тяжести имеем

$$
\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} + (C - A)\,qr + C_2\omega q &= M\,(yZ - zY)\\
A\frac{dq}{dt} + (A - C)\,pr - C_2\omega p &= M\,(zX - xZ)\\
C\frac{dr}{dt} &= M\,(xY - yX)
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

где координаты точки опоры P

$$
x = -a\gamma_1, \qquad y = -a\gamma_2, \qquad z = a_1 - a\gamma_3 \tag{4.4}
$$

К уравнениям (4.1)—(4.3) движения гиростата надлежит присоединить уравнения связи. Если опорная горизонтальная плоскость будет абсолютно шероховатой, то скорость точки опоры P равна нулю, т. е.

$$
u + qz - ry = 0, \qquad v + rx - pz = 0, \qquad w + py - qx = 0 \tag{4.5}
$$

В случае не абсолютно шероховатой плоскости возможно скольжение тела S_1 по плоскости; сила трения F пропорциональна величине нормальной реакции N и противоположна скорости точки опоры P. Элементарная работа реакции на действительном перемещении будет, очевидно, неположительной

$$
X\,(u + qz - ry) + Y\,(v + rx - pz) + Z\,(w + py - qx) \leqslant 0 \tag{4.6}
$$

Если горизонтальная плоскость будет абсолютно гладкой, то реакция нормальна к плоскости, причем

$$
X = N\gamma_1, \qquad Y = N\gamma_2, \qquad Z = N\gamma_3 \tag{4.7}
$$

Во всех случаях вектор скорости точки опоры P ортогонален к оси ζ, т. е. выполняется равенство

$$
\gamma_1\,(u + qz - ry) + \gamma_2\,(v + rx - pz) + \gamma_3\,(w + py - qx) = 0 \tag{4.8}
$$

Умножим уравнения (4.1) на Mu, Mv, Mw, уравнения (4.3) на p, q, r соответственно и сложим; будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,[M\,(u^2 + v^2 + w^2) + A\,(p^2 + q^2) + Cr^2 + 2Mg\zeta] =\\
&= M\,[X\,(u + qz - ry) + Y\,(v + rx - pz) + Z\,(w + py - qx)]
\end{aligned}
$$

С учетом соотношений (4.5)—(4.8) отсюда следует, что

$$
M\,(u^2 + v^2 + w^2) + A\,(p^2 + q^2) + Cr^2 + 2Mg\zeta \leqslant \mathrm{const} \tag{4.9}
$$

причем в случаях абсолютно шероховатой и гладкой плоскостей здесь будут только знаки равенства, т. е. существует интеграл энергии.

Как легко видеть, высота центра тяжести гиростата над плоскостью $\zeta = a - a_1\gamma_3$.

Умножим теперь уравнения (4.3) на координаты x, y, z точки опоры P соответственно и сложим; с учетом уравнений (4.4) и (4.2) получим первый интеграл

$$
A\,(px + qy) + (Cr + C_2\omega)\,z = \mathrm{const} \tag{4.10}
$$

Интеграл (4.10) выражает постоянство скалярного произведения вектора момента количеств движения гиростата для его центра тяжести O на радиус-вектор точки P относительно точки O; в случае $a_1 = 0$, когда центр тяжести O гиростата совпадает с центром O_1 сферического основания тела S_1, интеграл (4.10) представляет собой интеграл площадей.

Уравнения Пуассона (4.2) имеют очевидный интеграл

$$
\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{4.11}
$$

В случае абсолютно гладкой плоскости в силу равенств (4.4) и (4.7) из третьего уравнения (4.3) следует также первый интеграл

$$r = \text{const} \tag{4.12}$$

Исследуем устойчивость рассматриваемого гиростата, опирающегося на шероховатую или гладкую плоскость. Уравнения движения (4.1)—(4.3) допускают частное решение

$$p = q = 0, \quad r = r_0, \quad u = v = w = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1 \tag{4.13}$$

при этом

$$X = Y = 0, \quad Z = g, \quad x = y = 0, \quad z = a_1 - a = -l$$

В возмущенном движении положим $r = r_0 + \beta_1$, $\gamma_3 = 1 + \beta_2$, а для остальных переменных сохраним прежние обозначения.

В силу уравнений возмущенного движения будем иметь

$$\begin{gathered} V_1 = M(u^2 + v^2 + w^2) + A(p^2 + q^2) + C(\beta_1^2 + 2r_0\beta_1) - 2Mga_1\beta_2 \leqslant V_{10} \\ V_2 = A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + (Cr_0 + C_2\omega)\beta_2 + C\beta_1\beta_2 + C\frac{l}{a}\beta_1 = \text{const} \\ V_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \beta_2^2 + 2\beta_2 = 0 \end{gathered} \tag{4.14}$$

Здесь $V_{10} = \text{const}$ обозначает начальное значение функции V_1, причем знак равенства будем иметь в случае идеальной плоскости, знак неравенства — в случае скольжения с трением, направленным противоположно скорости точки опоры.

Рассмотрим функцию

$$\begin{gathered} V = V_1 + 2\lambda V_2 + \mu V_3 + \frac{1}{4}(C - A)\lambda^2 V_3^2 = \\ = A(p^2 + q^2) + 2A\lambda(p\gamma_1 + q\gamma_2) + \mu(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \\ + C\beta_1^2 + 2C\lambda\beta_1\beta_2 + [(C - A)\lambda^2 + \mu]\beta_2^2 + \\ + M(u^2 + v^2 + w^2) + 2C\left(r_0 + \lambda\frac{l}{a}\right)\beta_1 + \frac{1}{2}(C - A)\lambda^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \beta_2^2)\beta_2 \end{gathered} \tag{4.15}$$

где λ — некоторая постоянная, $\mu = Mga_1 - (Cr_0 + C_2\omega)\lambda$. Согласно критерию Сильвестра, условием, необходимым и достаточным для определенной положительности квадратичной части функции V, является неравенство

$$f(\lambda) \equiv A\lambda^2 + (Cr_0 + C_2\omega)\lambda - Mga_1 < 0 \tag{4.16}$$

Отметим, что это неравенство возможно, вообще говоря, если полином $f(\lambda)$ имеет два различных вещественных корня, т. е., если

$$(Cr_0 + C_2\omega)^2 + 4AMga_1 > 0 \tag{4.17}$$

Очевидно, линейная часть функции V обращается в нуль, если положить

$$\lambda = -\frac{a}{l}r_0$$

при этом условие (4.16) принимает вид

$$\left(C - A\frac{a}{l}\right)r_0^2 + C_2\omega r_0 + Mg\frac{a_1 l}{a} > 0 \tag{4.18}$$

Так как $dV / dt = dV_1 / dt \leqslant 0$, то при условии (4.18) функция (4.15) удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости. Таким образом, неравенство (4.18) является достаточным условием устойчивости невозмущенного движения (4.13) гиростата по отношению к величинам $u, v, w, p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Отметим, что если положить $\omega = 0$, то неравенство (4.18) принимает вид

$$\left(C - A\frac{a}{l}\right)r_0^2 + Mg\frac{a_1 l}{a} > 0 \tag{4.19}$$

и становится достаточным условием устойчивости вращения вокруг вертикали тяжелого твердого тела, опирающегося сферическим основанием на горизонтальную плоскость.

Если $a_1 < 0$, то центр тяжести тела расположен выше геометрического центра O_1 его сферического основания. В этом случае вращение тела будет устойчивым при достаточно большой угловой скорости вращения r_0, если $Cl > Aa$. Если же $a_1 > 0$, центр тяжести тела расположен ниже точки O_1. В этом случае при $Cl > Aa$ вращение тела устойчиво при любой угловой скорости вращения r_0, а если $Cl < Aa$, то устойчиво при

$$r_0^2 < \frac{Mg}{Aa - Cl} \frac{a_1 l^2}{a}$$

Эти выводы об устойчивости справедливы, в частности, и для опрокидывающегося волчка, или волчка «тип-топ» ($a_1 > 0$), изучению движения которого посвящена обширная литература. В частности, в работе [6] исследуется движение такого волчка в первом приближении в предположении, что в точке контакта на волчок действует сила вязкого трения. Интересно отметить, что при этом, исходя из линеаризированных уравнений, авторы находят условие, необходимое и достаточное для устойчивости вращения волчка вокруг вертикали, с которым с точностью до обозначений оказывается совпадающим условие (4.19).

Если предположить, что плоскость является абсолютно гладкой, то уравнения возмущенного движения, помимо первых интегралов (4.14), допускают также первый интеграл

$$V_4 = \beta_1 = \text{const}$$

Строя функцию

$$W = V - 2C\left(r_0 + \lambda \frac{l}{a}\right) V_4$$

где функция V определена равенством (4.15), найдем, что в этом случае достаточным условием устойчивости невозмущенного движения (4.13) будет неравенство (4.17)

Рассмотрим также функцию

$$W_1 = A\,(p\gamma_2 - q\gamma_1)$$

производная по времени от которой в силу уравнений возмущенного движения равна

$$W_1' = A\,(p^2 + q^2) - (Cr_0 + C_2\omega)\,(p\gamma_1 + q\gamma_2) - Mga_1\,(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \ldots$$

где многоточия обозначают не выписанные члены выше второго порядка малости. Очевидно, при условии

$$(Cr_0 + C_2\omega)^2 + 4AMga_1 < 0$$

функция W_1' будет определенно положительной. В силу теоремы Четаева о неустойчивости невозмущенное движение (4.13) будет при этом неустойчивым.

Следовательно, неравенство (4.17) необходимо и достаточно для устойчивости вращения вокруг вертикали гиростата на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости.

Поступила
20 III 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гиростатов. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1.
2. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. II, Гостехтеоретиздат, 1948.
3. Аппель П. Теоретическая механика. Т. II, Физматгиз, 1960.
4. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения. Т. I, ИИЛ, 1952.
5. Жуковский Н. Е. О гироскопическом шаре Бобылева. Собр. соч., т. I, Гостехтеоретиздат, 1948.
6. O'Brien S., Synge T. L. The instability of the tippe — top explained by sliding friction. Proc. Roy. Irish. Academy, 1954, v. 56, s. A, No. 3.