Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОДНА ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

В. В. Румянцев

(Москва)

1. Рассмотрим какую-нибудь голономную механическую систему. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — ее независимые лагранжевы координаты, $q_1', \ldots, q_n'$ — обобщенные скорости. Допустим, что уравнения движения системы имеют некоторое частное решение

$$q_i = f_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

которому соответствует определенное движение рассматриваемой системы, называемое невозмущенным.

Обозначим через t_0 начальный момент времени t, а через q_{i0} и q_{i0}' — начальные значения переменной q_i и ее производной по времени q_i'. Пусть для невозмущенного движения

$$q_{i0} = f_i(t_0), \qquad q_{i0}' = f_i'(t_0)$$

а для возмущенного движения

$$q_{i0} = f_i(t_0) + \varepsilon_i, \qquad q_{i0}' = f_i'(t_0) + \varepsilon_i'$$

где ε_i, ε_i' — некоторые вещественные постоянные, называемые возмущениями. Заданием этих постоянных возмущенное движение полностью определяется, так как действующие на систему силы предполагаются неизменными [1].

Пусть для возмущенного движения значения координат q_i и обобщенных скоростей q_i' суть

$$q_i = f_i(t) + x_i, \qquad q_i' = f_i'(t) + x_{n+i}$$

где $x_j(t)$ $(j = 1, \ldots, 2n)$ обозначают отклонения, или вариации, переменных q_i и q_i', удовлетворяющие уравнениям возмущенного движения

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(t, x_1, \ldots, x_{2n}) \qquad (j = 1, \ldots, 2n) \tag{1.2}$$

Будем предполагать, что функции $X_j(t, x_1, \ldots x_{2n})$ для всякого $t \geqslant t_0$ разлагаются в сходящиеся степенные ряды по целым степеням переменных $x_1, \ldots, x_{2n}$ с коэффициентами, являющимися определенными вещественными непрерывными функциями времени t, причем $X_j(t, 0, \ldots, 0) = 0$.

Допустим, нас интересует устойчивость невозмущенного движения (1.1) по отношению к некоторым данным непрерывным вещественным функциям $Q_1, \ldots, Q_k$ величин q_i, q_i' и времени t. Для невозмущенного движения функции Q_s после замены $q_i = f_i(t)$ и $q_i' = f_i'(t)$ обратятся в некоторые известные функции времени $F_s(t)$, а для возмущенного движения будут некоторыми функциями времени t и возмущений ε_i, ε_i'. Рассматривая разности $y_s = Q_s - F_s$, Ляпунов назвал невозмущенное движение (1.1) устойчивым по отношению к величинам $Q_1, \ldots, Q_k$, если при всяких L_s, как бы малы они ни были, могут быть выбираемы положительные числа E_i, E_i' так, чтобы при всяких возмущениях ε_i, ε_i', удовлетворяющих условиям

$$|\varepsilon_i| \leqslant E_i, \qquad |\varepsilon_i'| \leqslant E_i'$$

и при всяком $t \geqslant t_0$ выполнялись неравенства

$$|y_s| < L_s \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

Далее будем предполагать [1], что всякой системе вещественных значений возмущений ε_i, ε_i', численно достаточно малых, будет соответствовать некоторая система вещественных начальных значений y_{s0} переменных y_s и, как бы ни было мало данное положительное число A, последние всегда можно будет сделать удовлетворяющими неравенству

$$y_{10}^2 + \cdots + y_{k0}^2 < A$$

подчиняя возмущения ε_i, ε_i' условию, чтобы они по абсолютной величине не превосходили достаточно малых отличных от нуля величин E_i, E_i'. И, наоборот, как бы ни были малы данные положительные числа E_i, E_i', всегда возможно найти такое положительное число A, чтобы величине $y_{10}^2 + \cdots + y_{k0}^2 \leqslant A$ отвечали одна или несколько систем вещественных значений ε_i, ε_i', абсолютные величины которых были бы соответственно меньше E_i и E_i'.

Так как переменные y_s представляют собой некоторые функции переменных t, x_j, уничтожающиеся, когда все $x_j = 0$ $(j = 1, \ldots, 2n)$, то области изменения вещественных переменных $t, x_1 \ldots, x_{2n}$

$$t \geqslant t_0, \qquad x_1^2 + \cdots + x_{2n}^2 \leqslant H \tag{1.3}$$

где t_0 и $H > 0$ — некоторые постоянные, будет отвечать область

$$t \geqslant t_0, \qquad y_1^2 + \cdots + y_k^2 \leqslant H_1 \tag{1.4}$$

изменения переменных t, y_s, где $H_1 > 0$ — постоянная.

Предположим, что уравнения (1.2) допускают первый интеграл

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{2n}, t) = \mathrm{const} \tag{1.5}$$

где $\varphi(x_1, \ldots, x_{2n}, t)$ — вещественная непрерывная ограниченная однозначная функция своих переменных в области (1.3), уничтожающаяся, когда все переменные x_j суть нули, и пусть для всех значений переменных t, x_j в области (1.3) и соответствующих значений переменных t, y_s в области (1.4) имеет место неравенство

$$\Phi(y_1, \ldots, y_k, t) \leqslant \varphi(x_1, \ldots, x_{2n}, t) \tag{1.6}$$

Здесь $\Phi(y_1, \ldots, y_k, t)$ — вещественная непрерывная ограниченная однозначная функция своих переменных в области (1.4), уничтожающаяся, когда все y_s суть нули. Докажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения (1.2) допускают первый интеграл (1.5) и возможно найти определенно-положительную функцию $\Phi(y_1, \ldots, y_k, t)$ такую, что имеет место неравенство (1.6) для всех значений переменных t, x_j в области (1.3) и соответствующих значений переменных t, y_s в области (1.4), то невозмущенное движение (1.1) устойчиво по отношению к величинам $Q_1, \ldots, Q_k$.

Доказательство. [1] По определению знакоопределенной функции найдется не зависящая от t определенно-положительная функция $W(y_1, \ldots, y_k)$ такая, что в области (1.4) будет справедливо неравенство

$$\Phi(y_1, \ldots, y_k, t) \geqslant W(y, \ldots, y_k) \tag{1.7}$$

Пусть $A > 0$ — произвольно малое число, меньшее H_1, пусть l — точная низшая граница функции W на сфере (A):

$$y_1^2 + \cdots + y_k^2 = A$$

Число l, очевидно, положительно, так как W представляет собой определенно-положительную функцию.

Рассмотрим функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_{2n}, t_0)$; она, как не зависящая явно от времени, допускает бесконечно малый высший предел и, следовательно, для l найдутся такие числа λ и λ_1, что для значений переменных x_j, соответственно y_s, удовлетворяющих условию $x_1^2 + \cdots + x_{2n}^2 \leqslant \lambda$, соответственно $y_1^2 + \cdots + y_k^2 \leqslant \lambda_1$, значения функций $\Phi(y_1, \ldots, y_k, t_0)$ и $\varphi_1(x_1, \ldots, x_{2n}, t_0)$ будут удовлетворять условиям

$$\Phi(y_1, \ldots, y_k, t_0) \leqslant \varphi(x_1, \ldots, x_{2n}, t_0) < l$$

Если начальные значения переменных x_j, соответственно y_s, выбрать согласно неравенству $x_{10}^2 + \cdots + x^2_{2n,0} \leqslant \lambda$, соответственно неравенству $y_{10}^2 + \cdots + y_{k0}^2 \leqslant \lambda_1$, то по условиям теоремы имеем неравенства

$$W(y_1, \ldots, y_k) \leqslant \Phi(y_1, \ldots, y_k, t) \leqslant \varphi(x_1, \ldots, x_{2n}, t) < l \tag{1.8}$$

Отсюда заключаем, что при своих изменениях переменные y_s удовлетворяют условию

$$y_1^2 + \cdots + y_k^2 < A$$

так как l — точная низшая граница функции W на сфере (A). Теорема доказана.

Замечание. Если вместо (1.6) имеет место неравенство

$$\Phi(y_1, \ldots, y_k, t) \leqslant \varphi(x_1, \ldots, x_{2n}, t) + C \qquad (C \geqslant 0)$$

то при надлежащем выборе x_{i0} во все время движения будем иметь неравенство $y_1^2 + \ldots + y_k^2 < A$, где A такое число, что точная низшая граница функции W на сфере (A) превышает число C.

В качестве примера рассмотрим хорошо изученную задачу об устойчивости вращения вокруг вертикали тяжелого твердого тела в случае Лагранжа [1].

Пусть p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости твердого тела на его главные оси инерции для неподвижной точки, $\gamma, \gamma', \gamma''$ — направляющие косинусы вертикали относительно главных осей инерции. Проекции кинетического момента тела на эти оси суть

$$G_1 = Ap, \quad G_2 = Aq, \quad G_3 = Cr$$

где A, C — главные моменты инерции твердого тела для его неподвижной точки.

Исследуем устойчивость вращения тела вокруг вертикали

$$p = q = 0, \qquad r = r_0, \qquad \gamma = \gamma' = 0, \qquad \gamma'' = 1 \tag{1.9}$$

по отношению к величинам $G_1, G_2, G_3, \gamma, \gamma', \gamma''$, полагая в возмущенном движении

$$G_3 = G + \varkappa, \qquad \gamma'' = 1 + \delta \qquad (G = Cr_0)$$

и сохраняя прежние обозначения для остальных переменных.

В силу очевидного неравенства

$$G_1^2 + G_2^2 + \varkappa^2 \leqslant D\,(Ap^2 + Aq^2 + C\zeta^2) \qquad (\varkappa = C\zeta)$$

где D—наибольшая из двух величин A и C, для возмущенного движения значения функции

$$\Phi \equiv \frac{1}{D}\,(G_1^2 + G_2^2 + \varkappa^2) + 2\lambda\,(G_1\gamma + G_2\gamma' + \varkappa\delta) - (mgz + G\lambda)\,(\gamma^2 + \gamma'^2 + \delta^2) \tag{1.10}$$

не превышают значений функции

$$\varphi \equiv V_1 + 2\lambda V_2 - (mgz + G\lambda)\,V_3 - 2\,(G + C\lambda)\,V_4 = \mathrm{const}$$

где $V_i\,(i = 1, \ldots, 4)$ — первые интегралы уравнений возмущенного движения (см. [1], стр. 27), λ — постоянная, mg — вес тела, z — координата центра тяжести.

Согласно доказанной выше теореме условия определенной положительности функции (1.10) дадут достаточные условия устойчивости невозмущенного движения (1.9); последние приводятся к одному неравенству

$$G^2 - 4Dmgz > 0 \tag{1.11}$$

Очевидно, если выполнено это неравенство, то выполняется условие Майевского $C^2r_0^2 - 4Amgz > 0$; последнее, как известно, необходимо и достаточно для устойчивости (1.9).

2. Доказанная выше теорема может оказаться полезной для применения второго метода Ляпунова к задачам об устойчивости движения сплошной среды по отношению к конечному числу некоторых параметров, интегральным образом характеризующих ее движение [2]. Такими параметрами могут быть, например, координаты центра тяжести ограниченного объема сплошной среды или проекции ее количества движения на некоторые оси и т. п. величины, изменения которых со временем описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Устойчивость движения сплошной среды по отношению к указанным параметрам будем называть условной устойчивостью движения сплошной среды.

В качестве примера рассмотрим задачу об устойчивости вращательных движений твердого тела с полостью, наполненной жидкостью, по отношению к параметрам, характеризующим движение твердого тела, и проекциям момента количеств движения жидкости [2].

Рассмотрим свободное твердое тело, имеющее полость, наполненную полностью или частично (с пузырьком) однородной несжимаемой идеальной жидкостью. Для простоты предположим, что центральный эллипсоид инерции твердого тела есть эллипсоид вращения, а полость имеет форму произвольного тела вращения с той же самой осью вращения, что и эллипсоид инерции тела. Если жидкость имеет свободную поверхность, то давление на ней предполагается постоянным. Будем также предполагать, что движение жидкости совершается сплошным образом, причем скорости частиц жидкости и давление являются непрерывными функциями координат.

Так как среди возможных перемещений тела и жидкости в его полости существуют вращения вокруг любой прямой, а также поступательные перемещения всей системы тело + жидкость как одного твердого тела, имеет место теорема о моменте количеств движения системы в ее движении по отношению к центру масс системы, т. е. по отношению к системе координат $O_1x_1y_1z_1$ с началом в центре масс тела и жидкости O_1 и осями, параллельными неподвижным осям. Это обстоятельство позволяет рассматривать в задаче об устойчивости вращательных движений твердого тела с полостью, наполненной жидкостью, одни относительные движения, как если бы центр масс O_1 системы был неподвижным.

Введем в рассмотрение еще одну систему прямоугольных осей координат $Oxyz$, жестко связанную с твердым телом.

В случае, если жидкость полностью заполняет полость тела, начало O этой подвижной системы координат совместим с центром O_1 масс системы, а оси направим по главным осям инерции твердого тела для его точки O. В случае, когда жидкость в полости имеет свободную поверхность, давление на которой постоянно, за начало O примем центр масс твердого тела, а оси координат направим по его главным центральным осям инерции. В обоих случаях ось Oz будем совмещать с осью вращения центрального эллипсоида инерции тела и его полости. Моменты инерции тела относительно осей x, y, z будем обозначать через $A = B$, C, а направляющие косинусы оси неизменного направления O_1z_1 относительно подвижных осей через γ_1, γ_2, γ_3.

Чтобы остановиться на чем-либо определенном, будем рассматривать случай, когда центр масс системы движется прямолинейно с постоянной скоростью. Этот случай является известным приближением для небольших участков настильных траекторий снарядов. И так же, как в задаче об устойчивости вращательных движений снаряда с твердым снаряжением, в нашей задаче об устойчивости вращательных движений твердого тела с жидким наполнением будем предполагать, что на тело действует лишь опрокидывающая пара сил давления воздуха [3]. Момент этой пары примем пропорциональным синусу угла между осью Oz тела и направлением скорости движения центра масс системы O_1; проекции момента пары на оси x, y, z пусть будут равны $L_1 = a\gamma_2$, $L_2 = -a\gamma_1$, $L_3 = 0$, где $a = \text{const}$. При этом предполагается, что ось O_1z_1 направлена по скорости центра масс O_1 системы. Делая указанные предположения и не входя в их обоснование, отметим лишь, что они будут тем точнее, чем меньше объем воздушного пузырька в жидкости, наполняющей полость.

Из общих теорем в относительном движении механической системы около ее центра масс можно установить некоторые первые интегралы уравнений движения твердого тела с полостью, наполненной жидкостью.

В движении системы относительно осей $O_1x_1y_1z_1$ действительные перемещения твердого тела и жидкости в его полости находятся среди возможных перемещений системы. Так как при сделанных предположениях о силах давления воздуха последние допускают силовую функцию $U = -a\gamma_3$, то в относительном движении системы существует закон живых сил

$$T_1 + T_2 + a\gamma_3 = \text{const} \tag{2.1}$$

где T_1 и T_2 — кинетические энергии тела и жидкости в их движении относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$.

Если обозначить через v_1, v_2, v_3 и ω_1, ω_2, ω_3 проекции на подвижные оси векторов $\mathbf{v}_0$ скорости точки O тела и $\boldsymbol{\omega}$ — мгновенной угловой скорости тела соответственно, то будем иметь

$$2T_1 = M_1 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + A (\omega_1^2 + \omega_2^2) + C\omega_3^2,$$

где M_1 — масса твердого тела. В случае, когда жидкость полностью заполняет полость, $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ очевидно.

Обозначая через ρ плотность жидкости и через v_x, v_y, v_z — проекции на подвижные оси скорости $\mathbf{v}$ частиц жидкости в ее движении относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$, будем иметь

$$2T_2 = \rho \int_\tau (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\, d\tau$$

где τ — область пространства xyz, занятая в данный момент жидкостью.

Сила давления воздуха на тело при сделанных предположениях не имеет момента относительной оси O_1z_1, так что в относительном движении системы существует интеграл площадей

$$(A\omega_1 + g_1)\gamma_1 + (A\omega_2 + g_2)\gamma_2 + (C\omega_3 + g_3)\gamma_3 = \mathrm{const} \tag{2.2}$$

где через

$$g_1 = \rho \int_\tau (yv_z - zv_y)\, d\tau, \quad g_2 = \rho \int_\tau (zv_x - xv_z)\, d\tau, \quad g_3 = \rho \int_\tau (xv_y - yv_x)\, d\tau \tag{2.3}$$

обозначены проекции на подвижные оси момента количеств движения жидкости в ее движении относительно осей координат $O_1x_1y_1z_1$.

Так как количество относительного движения системы

$$M_1\mathbf{v}_0 + \rho \int_\tau \mathbf{v}\, d\tau = 0$$

то момент количеств относительно движения системы один и тот же для всех точек пространства. Выпишем также очевидное равенство

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{2.4}$$

для направляющих косинусов оси O_1z_1.

Для полостей в форме тел вращения момент сил давления идеальной жидкости и воздуха в полости тела относительно оси Oz равен, очевидно, нулю. Так как $A = B$ и $L_3 = 0$, то во все время движения проекция мгновенной угловой скорости тела на ось Oz остается постоянной:

$$\omega_3 = \mathrm{const} \tag{2.5}$$

Среди действительных движений твердого тела с полостью, наполненной идеальной жидкостью, имеются равномерные вращения твердого тела с угловой скоростью ω вокруг оси Oz, коллинеарной при этом оси O_1z_1, тогда как движение жидкости является установившимся и таким, что проекции момента количеств движения ее на оси x и y равны нулю, а на ось Oz — некоторой постоянной g. Так как жидкость по предположению лишена вязкости, а полость имеет форму тела вращения, то при вращении тела вокруг оси Oz среди таких установившихся движений ее возможно, в частности, равновесие по отношению к системе координат $Ox_1y_1z_1$; при этом $g = 0$. Возможен также при определенных условиях другой крайний случай, когда жидкость вращается как одно твердое тело с угловой скоростью ω; при этом

$$g = \omega\rho \int (x^2 + y^2)\, d\tau$$

где τ_0 — область, занятая жидкостью в этом движении.

Рассмотрим устойчивость вращательных движений твердого тела и соответствующего установившегося движения жидкости в его полости:

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1$$
$$v_1 = v_2 = v_3 = 0, \quad g_1 = g_2 = 0, \quad g_3 = g \tag{2.6}$$

по отношению к величинам ω_1, ω_2, ω_3, γ_1, γ_2, γ_3, g_1, g_2, g_3, v_1, v_2, v_3. В случае, когда жидкость полностью заполняет полость, устойчивость будем рассматривать по отношению к первым девяти из этих величин.

В возмущенном движении положим

$$\omega_3 = \omega + \xi, \quad g_3 = g + \eta, \quad \gamma_3 = 1 + \zeta$$

а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Интегралы (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) для возмущенного движения примут вид:

$$V_1 = M_1(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + C(\xi^2 + 2\omega\xi) + 2T_2 + 2a\zeta = \text{const}$$
$$V_2 = (A\omega_1 + g_1)\gamma_1 + (A\omega_2 + g_2)\gamma_2 + C\xi + \eta + C(\omega + \xi)\zeta + (g + \eta)\zeta = \text{const}$$
$$V_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \zeta^2 + 2\zeta = 0, \qquad V_4 = \xi = \text{const} \tag{2.7}$$

Введем в рассмотрение также функцию

$$H_1 \equiv M_1(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + C(\xi^2 + 2\omega\xi) +$$
$$+ \frac{1}{S}(g_1^2 + g_2^2 + 2g\eta + \eta^2) + 2a\zeta$$

где S — величина, пропорциональная наибольшему из главных моментов инерции жидкости в полости для точки O.

В силу установленного Ляпуновым неравенства $g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 \leqslant 2T_2S$ можно утверждать, что

$$H_1 \leqslant V_1 = \text{const} \tag{2.8}$$

Рассмотрим функцию

$$V = H_1 + 2\lambda V_2 - (a + C\omega\lambda + g\lambda)V_3 - 2C(\omega + \lambda)V_4 + \frac{C(C-A)}{A}V_4^2 =$$
$$= A\omega_1^2 + 2\lambda(A\omega_1 + g_1)\gamma_1 - (a + C\omega\lambda + g\lambda)\gamma_1^2 + \frac{1}{S}g_1^2 + M_1v_1^2 +$$
$$+ A\omega_2^2 + 2\lambda(A\omega_2 + g_2)\gamma_2 - (a + C\omega\lambda + g\lambda)\gamma_2^2 + \frac{1}{S}g_2^2 + M_1v_2^2 + \frac{C^2}{A}\xi^2 +$$
$$+ 2\lambda(C\xi + \eta)\zeta - (a + C\omega\lambda + g\lambda)\zeta^2 + \frac{1}{S}\eta^2 + M_1v_3^2 + 2\left(\frac{g}{S} + \lambda\right)\eta \tag{2.9}$$

представляющую собой сумму трех однотипных квадратичных форм от четырех переменных каждая и линейной относительно переменной η функции; λ — постоянная. Согласно критерию Сильвестра для положительной знакоопределенности квадратичной части функции V необходимо и достаточно постоянную λ выбрать так, чтобы

$$(A + S)\lambda^2 + (C\omega + g)\lambda + a < 0 \tag{2.10}$$

Последнее возможно, если полином, стоящий в (2.10) слева, имеет два различных вещественных корня λ_1 и λ_2, т. е. если

$$(C\omega + g)^2 - 4(A + S)a > 0 \tag{2.11}$$

При выполнении условия (2.11) постоянную λ можно выбрать произвольной из интервала $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$; если при этом будем также иметь

$$(g / S + \lambda)\eta \geqslant 0 \tag{2.12}$$

то функция V будет определенно-положительной по отношению ко всем своим переменным.

В силу неравенства (2.8)

$$V \leqslant V_1 + 2\lambda V_2 - (a + C\omega\lambda + g\lambda)V_3 - 2C(\omega + \lambda)V_4 + \frac{C(C-A)}{A} V_4^2$$

Следовательно, при выполнении условий (2.11), (2.12) функция V удовлетворяет доказанной выше теореме.

Таким образом, условия (2.11), (2.12) можно рассматривать как достаточные условия устойчивости невозмущенного движения системы (2.6) по отношению к величинам ω_1, ω_2, ω_3, g_1, g_2, g_3, γ_1, γ_2, γ_3, v_1, v_2, v_3. Отметим, что если положить $\lambda = -g / S$, то условие (2.12) будет выполнено, а неравенство (2.10) примет вид:

$$\left(C\omega - A\frac{g}{S}\right)\frac{g}{S} - a > 0 \tag{2.13}$$

и будет единственным достаточным условием устойчивости невозмущенного движения (2.6).

Если положить $\lambda = -2a / C\omega$, то неравенства (2.10) и (2.12) примут вид данных в работе [2] условий устойчивости (2.12) и (2.13).

Легко также видеть [2], что если движение жидкости, полностью заполняющей полость, будет все время безвихревым с потенциалом скоростей φ, то условие (2.12) выполняется.

Покажем, наконец, что условие (2.11) является достаточным условием устойчивости невозмущенного движения (2.6) в первом приближении. В самом деле, выпишем третье из уравнений возмущенного движения системы [2]:

$$\frac{d\eta}{dt} + \omega_1 g_2 - \omega_2 g_1 = 0$$

Считая ω_1, ω_2, g_1, g_2 малыми первого порядка и пренебрегая их произведениями, получим интеграл уравнения в вариациях

$$V_5 = \eta = \mathrm{const}$$

Рассмотрим функцию

$$W = V - 2\left(\frac{g}{S} + \lambda\right)V_5 \tag{2.14}$$

где функция V определена равенством (2.9). Очевидно, необходимым и достаточным условием положительной знакоопределенности функции (2.14) является условие (2.11), что и доказывает наше утверждение.

Поступила 14 XI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.
2. Румянцев В. В. Об устойчивости вращательных движений твердого тела с жидким наполнением. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.
3. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого наполнена идеальной жидкостью. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2.