

Академия наук СССР
Прикладная математика и механика
Том XXII, вып. 4, 1958 г.

В. В. Румянцев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА
В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ. II

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ. II.

В. В. Румянцев

(Москва)

Исследуется устойчивость некоторых движений тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе в случае, когда неподвижная ось внешнего кольца подвеса горизонтальна. Данная заметка является продолжением (1).

1. Примем неподвижную точку O симметричного гироскопа за начало неподвижной прямоугольной системы координат $O\xi\eta\zeta$, ось $O\xi$ которой направим вертикально вверх, а ось $O\zeta$ — горизонтально по неподвижной оси вращения внешнего кольца подвеса. Подвижную систему координат $Oxyz$ свяжем неизменным образом с внутренним кольцом подвеса, совместив ось Ox с осью вращения внутреннего кольца, а ось Oz — с осью вращения гироскопа. Оси Oy и Oz направим таким образом, чтобы образовались правые прямоугольные системы координат $O\xi\eta\zeta$ и $Oxyz$. Будем предполагать, что оси x, y, z являются главными осями инерции внутреннего кольца и гироскопа для точки O ; силу тяжести гироскопа и внутреннего кольца обозначим через P , и пусть центр тяжести расположен на оси z , его координату обозначим через z_0 . Пусть $A = B, C$ и A_1, B_1, C_1 — главные моменты инерции гироскопа и внутреннего кольца подвеса для неподвижной точки O соответственно и A_2 — момент инерции внешнего кольца подвеса относительно его оси $O\zeta$.

За независимые лагранжевы координаты, определяющие положение рассматриваемой механической системы в пространстве $O\xi\eta\zeta$, примем углы Эйлера: угол нутации θ (между осями ζ и z), угол прецессии ψ (между осями ξ и x) и угол собственного вращения φ — угол поворота гироскопа вокруг оси Oz относительно внутреннего кольца подвеса. Проекции мгновенных угловых скоростей $\bar{\omega}$ гироскопа и $\bar{\omega}_1$ — внутреннего кольца на оси подвижной системы координат определяются при этом формулами

$$\begin{aligned} p &= \theta', & q &= \psi' \sin \theta, & r &= \varphi' + \psi' \cos \theta \\ p_1 &= \theta', & q_1 &= \psi' \sin \theta, & r_1 &= \psi' \cos \theta \end{aligned} \quad (1.1)$$

Вектор мгновенной угловой скорости внешнего кольца направлен по оси $O\zeta$; его проекция на эту ось равна ψ' .

Воспользуемся выражением для кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2} \{ (A + A_1) \theta'^2 + [(A + B_1) \sin^2 \theta + C_1 \cos^2 \theta + A_2] \psi'^2 + C (\varphi' + \psi' \cos \theta)^2 \}$$

и силовой функции силы тяжести

$$U = -Pz_0 \sin \theta \sin \psi$$

Составляя функцию Лагранжа $L = T + U$, получим следующие уравнения движения системы:

$$\begin{aligned} (A + A_1) \theta'' - (A + B_1 - C_1) \psi'^2 \sin \theta \cos \theta + C (\varphi' + \psi' \cos \theta) \psi' \sin \theta + \\ + Pz_0 \cos \theta \sin \psi = 0 \\ \frac{d}{dt} \{[(A + B_1) \sin^2 \theta + C_1 \cos^2 \theta + A_2] \psi' + C (\varphi' + \psi' \cos \theta) \cos \theta\} + \\ + Pz_0 \sin \theta \cos \psi = 0 \\ C \frac{d}{dt} (\varphi' + \psi' \cos \theta) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Очевидно, уравнения движения (1.2) допускают первые интегралы

$$\begin{aligned} (A + A_1) \theta'^2 + [(A + B_1) \sin^2 \theta + C_1 \cos^2 \theta + A_2] \psi'^2 + \\ + C (\varphi' + \psi' \cos \theta)^2 + 2Pz_0 \sin \theta \sin \psi = h \\ \varphi' + \psi' \cos \theta = r = \text{const} \end{aligned} \quad (1.3)$$

первый из которых есть интеграл энергии. Исследуем устойчивость вращения гироскопа вокруг вертикали, описываемого частным решением уравнений (1.2):

$$\theta = \frac{1}{2} \pi, \quad \theta' = 0, \quad \psi = \frac{1}{2} \pi, \quad \psi' = 0, \quad r = \omega \quad (1.4)$$

Очевидно, срединная плоскость внешнего кольца в случае (1.4) горизонтальна, а срединная плоскость внутреннего кольца вертикальна.

Полагая в возмущенном движении

$$\theta = \frac{1}{2} \pi + \eta_1, \quad \theta' = \eta_1', \quad \psi = \frac{1}{2} \pi + \eta_2, \quad \psi' = \eta_2', \quad r = \omega + \xi$$

без труда установим, что уравнения возмущенного движения допускают первые интегралы

$$\begin{aligned} V_1 = (A + A_1) \eta_1'^2 + (A + B_1 + A_2) \eta_2'^2 + C (\xi^2 + 2\omega\xi) - \\ - Pz_0 (\eta_1^2 + \eta_2^2) + \dots = \text{const} \\ V_2 = \xi = \text{const} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Первый из этих интегралов выписан лишь с точностью до членов второго порядка включительно относительно переменных η_1 и η_2 . Функция

$$V = V_1 - 2C\omega V_2 = (A + A_1) \eta_1'^2 + (A + B_1 + A_2) \eta_2'^2 + \\ + C\xi^2 - Pz_0 (\eta_1^2 + \eta_2^2) + \dots \quad (1.6)$$

является определенно-положительной функцией своих переменных лишь в случае неравенства

$$z_0 < 0$$

которое, таким образом, является достаточным условием устойчивости движения (1.4) при любом значении ω по отношению к переменным θ , θ' , ψ , ψ' , r ¹. При этом, как нетрудно видеть, устойчивость имеет вековой характер.

В случае уравновешенного гироскопа ($z_0 = 0$) движение (1.4) устойчиво по отношению к переменным θ' , ψ' , r .

При $z_0 > 0$ степень неустойчивости — четная и согласно теореме Кельвина возможна гироскопическая стабилизация. Найдем условие последней, используя фундаментальную теорему Н. Г. Четаева [2] о существовании

¹ Скимель В. Н. Некоторые задачи об устойчивости движения твердого тела. Автореферат диссертации. Казань, 1955.

знакоопределенного квадратичного интеграла уравнений в вариациях для устойчивого невозмущенного движения.

Легко видеть, что в рассматриваемом случае уравнения в вариациях

$$\begin{aligned} (A + A_1) \eta_1'' + C\omega\eta_2' - Pz_0\eta_1 &= 0 \\ (A + B_1 + A_2) \eta_2'' - C\omega\eta_1' - Pz_0\eta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

допускают интеграл [2]

$$\begin{aligned} \Gamma = 2[(A + A_1) \eta_1' \eta_2 - (A + B_1 + A_2) \eta_1 \eta_2'] + C\omega(\eta_1^2 + \eta_2^2) - \\ - \frac{A_1 - B_1 - A_2}{2C\omega} [(A + B_1 + A_2) \eta_2'^2 - (A + A_1) \eta_1'^2 + \\ + Pz_0(\eta_1^2 - \eta_2^2)] = \text{const} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2} C\omega V_1 + Pz_0\Gamma - C^2\omega^2 V_2 = \\ = \frac{C^2\omega^2 + (A_1 - B_1 - A_2) Pz_0}{2C\omega} (A + A_1) \eta_1'^2 + 2(A + A_1) Pz_0 \eta_1' \eta_2 + \\ + \frac{C^2\omega^2 + (A_1 - B_1 - A_2) Pz_0}{2C\omega} Pz_0 \eta_2^2 + \frac{1}{2} C^2\omega^2 \xi^2 + \\ + \frac{C^2\omega^2 + (A_2 + B_1 - A_1) Pz_0}{2C\omega} (A + B_1 + A_2) \eta_2'^2 - 2(A + B_1 + A_2) Pz_0 \eta_1 \eta_2' + \\ + \frac{C^2\omega^2 + (A_2 + B_1 - A_1) Pz_0}{2C\omega} Pz_0 \eta_1^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

В случае $z_0 > 0$ функция V будет определено-положительной функцией своих переменных при выполнении единственного условия

$$C^2\omega^2 - (2A + A_1 + B_1 + A_2 + 2\sqrt{(A + A_1)(A + B_1 + A_2)}) Pz_0 > 0 \quad (1.10)$$

которое и является условием гироскопической стабилизации движения (1.4) по отношению к переменным $\theta, \phi, \theta', \phi', r$.

Если пренебречь массами колец карданова подвеса, то условие (1.10) переходит в известное условие Майевского $C^2\omega^2 - 4APz_0 > 0$, необходимое и достаточное для устойчивости вращения вокруг вертикали гироскопа Лагранжа. Можно показать¹, что неравенство (1.10) является также необходимым условием устойчивости движения (1.4).

Если гироскопическая стабилизация в действительности имеет место, то под действием диссипативных сил она разрушится, т. е. устойчивость движения (1.4) в случае $z_0 > 0$ при условии (1.10) будет иметь временный характер.

Для доказательства этого утверждения предположим, что в возмущенном движении на систему действуют диссипативные силы, производные от определено-положительной функции Релея

$$2f = a\eta_1'^2 + 2b\eta_1'\eta_2' + c\eta_2'^2$$

Уравнения возмущенного движения в первом приближении будут иметь вид:

$$\begin{aligned} (A + A_1) \eta_1'' + C\omega\eta_2' - Pz_0\eta_1 &= -a\eta_1' - b\eta_2' \\ (A + B_1 + A_2) \eta_2'' - C\omega\eta_1' - Pz_0\eta_2 &= -b\eta_1' - c\eta_2' \end{aligned} \quad (1.11)$$

См. сноску на стр. 500.

Рассмотрим функцию

$$2W = (A + A_1) \eta_1'^2 + (A + B_1 + A_2) \eta_2'^2 - Pz_0 (\eta_1^2 + \eta_2^2) - 4\varepsilon [(A + A_1) \eta_1 \eta_1' + (A + B_1 + A_2) \eta_2 \eta_2'] \quad (1.12)$$

и производную по времени от нее, взятую в силу дифференциальных уравнений (1.11):

$$W' = - \{ [a + 2\varepsilon(A + A_1)] \eta_1'^2 + 2b\eta_1' \eta_2' + [c + 2\varepsilon(A + B_1 + A_2)] \eta_2'^2 + 2Pz_0\varepsilon (\eta_1^2 + \eta_2^2) - 2\varepsilon [C\omega (\eta_1 \eta_2' - \eta_1' \eta_2) + b (\eta_1 \eta_2' + \eta_1' \eta_2) + a\eta_1' \eta_1 + c\eta_2' \eta_2] \} \quad (1.13)$$

Здесь ε — положительная постоянная, которую можно выбрать столь малой, что главные диагональные миноры дискриминанта квадратичной формы $-W'$ будут положительными. При этом функция W' будет определено-отрицательной, а функция W допускает бесконечно малый высший предел и выбором численно сколь угодно малых $\eta_1, \eta_1', \eta_2, \eta_2'$ ее можно сделать отрицательной. В силу теоремы Ляпунова о неустойчивости заключаем о неустойчивости движения (1.4) по отношению к переменным $\theta, \psi, \theta', \psi'$ при действии диссипативных сил.

Рассмотрим также вопрос об устойчивости вращения тяжелого симметричного гироскопа вокруг горизонтали, описываемого частным решением уравнений (1.2):

$$\theta = 0, \quad \theta' = 0, \quad \psi = 0, \quad \psi' = 0, \quad r = \omega \quad (1.14)$$

При этом срединные плоскости внешнего и внутреннего колец вертикальны и совпадают одна с другой. Покажем, что движение (1.14) неустойчиво по отношению к переменным $\theta, \psi, \theta', \psi'$. В самом деле, уравнения возмущенного движения имеют в данном случае вид:

$$\begin{aligned} (A + A_1) \eta_1'' - (A + B_1 - C_1) \eta_1 \eta_2'^2 + C(\omega + \zeta) \eta_1 \eta_2' + \\ + Pz_0 \eta_2 \left(1 - \frac{1}{2} \eta_1^2\right) + \dots = 0 \\ (A_2 + C_1) \eta_2'' + 2(A + B_1 - C_1) \eta_1 \eta_1' \eta_2' + (A + B_1 - C_1) \eta_1^2 \eta_2'' + \\ + Pz_0 \eta_1 \left(1 - \frac{1}{2} \eta_2^2\right) - C(\omega + \zeta) \eta_1 \eta_1' + \dots = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

где многоточия обозначают невыписанные члены порядка выше третьего. Рассмотрим функцию

$$V = (A + A_1) \eta_1' \eta_2 + (A_2 + C_1) \eta_1 \eta_2' \quad (1.16)$$

производная которой V' в силу уравнений возмущенного движения (1.15) с точностью до членов второго порядка малости равна

$$V' = -Pz_0 (\eta_1^2 + \eta_2^2) + (A + A_1 + A_2 + C_1) \eta_1' \eta_2' + \dots$$

Пусть, например, $z_0 > 0$. В одной из полостей области $V < 0$, определяемой совместными неравенствами

$$\eta_1 < 0, \quad \eta_2 > 0, \quad \eta_1' < 0, \quad \eta_2' > 0$$

функция V' является определено-отрицательной функцией при достаточно малых по абсолютной величине значениях переменных.

Следовательно, функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Н. Г. Четаева о неустойчивости, что и доказывает высказанное утверждение.

2. Рассмотрим практически интересный случай гироскопа в кардановом подвесе, к оси Oz которого приложен некоторый момент внешних сил L_z . Этот момент, в частности, может быть выбран так, что угловая скорость собственного вращения гироскопа будет оставаться постоянной во все время движения ^[3] $\varphi' = \text{const}$. Будем предполагать, что L_z является непрерывной функцией углов Эйлера и их производных по времени.

Уравнения движения симметричного тяжелого гироскопа при горизонтальном расположении оси вращения внешнего кольца подвеса в рассматриваемом случае можно привести к виду

$$(A + A_1)\theta'' - (A + B_1 - C_1)\psi'^2 \sin\theta \cos\theta + Cr\psi' \sin\theta + Pz_0 \cos\theta \sin\psi = 0$$

$$\frac{d}{dt} \{[(A + B_1) \sin^2\theta + C_1 \cos^2\theta + A_2]\psi'\} - Cr\theta' \sin\theta + Pz_0 \sin\theta \cos\psi = 0$$

$$C \frac{dr}{dt} = L_z$$

Какова бы ни была функция, удовлетворяющая указанным условиям L_z , уравнения движения (2.1) имеют первый интеграл

$$(A + A_1)\theta'^2 + [(A + B_1) \sin^2\theta + C_1 \cos^2\theta + A_2]\psi'^2 + 2Pz_0 \sin\theta \sin\psi = \text{const}$$

аналогичный интегралу энергии.

Предположим далее, что уравнения (2.1) также допускают частные решения вида (1.4) или (1.14), возможные, очевидно, в случае, когда $L_z = 0$ для этих установившихся движений. Нетрудно видеть, что все полученные в п. 1 выводы относительно устойчивости или неустойчивости движений, описываемых частными решениями (1.4) или (1.14), остаются справедливыми и в рассматриваемом случае.

В самом деле, уравнения возмущенного движения для ведущего движения (1.4) имеют первый интеграл

$$V_1 = (A + A_1)\eta_{11}'^2 + (A + B_1 + A_2)\eta_{12}'^2 - Pz_0(\eta_{11}^2 + \eta_{12}^2) + \dots = \text{const} \quad (2.3)$$

который при условии $z_0 < 0$ является определенно-положительным по отношению к переменным $\eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{11}', \eta_{12}'$, что и доказывает при $z_0 < 0$ устойчивость невозмущенного движения (1.4) по отношению к переменным $\theta, \theta', \psi, \psi'$.

Уравнения в вариациях по-прежнему имеют вид (1.7) и допускают интеграл (1.8). Следовательно, рассмотрением функции Ляпунова вида

$$V = \frac{1}{2} C \omega V_1 + Pz_0 \Gamma$$

получим при $z_0 > 0$ условие (1.10) гироскопической стабилизации (в первом приближении) движения (1.4), разрушаемой действием диссипативных сил.

Рассмотрением функции (1.16) можно убедиться в неустойчивости движения (1.14) и в данном случае.

Поступила 11 IV 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, т. XXII, вып. 3, 1958.
2. Четаев Н. Г. О некоторых задачах об устойчивости движения в механике. ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.
3. Magnus K. Beiträge zur Dynamik des kräftefreien, kardanisch gelagerten Kreisels. ZAMM, Bd. 35, Nr. 1/2, 1955.