ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 70. Вып. 6, 2006

УДК 531.36

© 2006 г. В. В. Румянцев

О ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ ДЛЯ СИСТЕМ С НЕУДЕРЖИВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

Даются выводы и формулировки вариационных принципов аналитической механики для систем с неудерживающими (освобождающими) идеальными гладкими связями, первоначально установленных их авторами для систем, стесненных удерживающими (неосвобождающими) связями. Излагаются принцип виртуальных перемещений, неравенство Фурье, принцип Даламбера–Лагранжа, принцип наименьшего принуждения Гаусса и его видоизменение – принцип наибольшей работы Четаева, принцип Журдена, принцип Гамильтона–Остроградского, принцип наименьшего действия в формах Лагранжа и Якоби, принцип Суслова–Воронца.

1. Некоторые определения [1, 2]. Пусть $Oxyz$ – инерциальная система координат, относительно которой движется система материальных точек M_ν с массами m_ν ($\nu = 1, \ldots, N$). Если точки M_ν системы в произвольно выбранный момент времени t не могут занимать произвольного положения в пространстве или не могут иметь произвольные скорости, то такая система называется несвободной. Условия, налагаемые на положения или движения несвободной системы, называются связями. Если связи не позволяют системе занимать произвольные положения, то они называются геометрическими или конечными связями. Если связи не допускают только, чтобы точки системы в данный момент времени имели произвольные скорости, то связи называются кинематическими или дифференциальными. Конечные связи, а также дифференциальные интегрируемые связи называются голономными, а дифференциальные неинтегрируемые связи называются неголономными. Если связи не зависят явно от времени, то они называются стационарными или склерономными; в противном случае – нестационарными или реономными.

Связи называются удерживающими, или двусторонними, если аналитически они выражаются уравнениями вида

$$f_\alpha(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0, \quad \varphi_\beta(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu, \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu) = 0; \quad \alpha = 1, \ldots, a; \quad \beta = 1, \ldots, b \tag{1.1}$$

и неудерживающими, или односторонними, если они выражаются неравенствами вида

$$f_\alpha(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu) \geq 0, \quad \varphi_\beta(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu, \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu) \geq 0 \tag{1.2}$$

Когда левые части этих соотношений положительны, говорят, что связи ослаблены или система сошла со связей; когда же они равны нулю, то связи действуют, или находятся в напряжении. Связи (1.1), (1.2) будем считать независимыми и гладкими. Ограничимся далее рассмотрением лишь линейных дифференциальных связей

$$\varphi_\beta(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu, \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu) = \sum_\nu \mathbf{B}_\nu^\beta \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu + D_\beta \geq 0; \quad \mathbf{r}_\nu = (x_\nu, y_\nu, z_\nu), \dot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt}$$

где $\mathbf{B}_\nu^\beta$ и D_β – некоторые функции времени и координат.

Здесь и всюду далее суммирование по ν ведется от $\nu = 1$ до $\nu = N$, по α – от $\alpha = 1$ до $\alpha = a$, по β – от $\beta = 1$ до $\beta = b$.

Элементарные перемещения $\delta\mathbf{r}_\nu$, удовлетворяющие условиям

$$\delta f_\alpha = \sum_\nu \operatorname{grad}_{r_\nu} f_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu \geq 0, \quad \sum_\nu \operatorname{grad}_{\dot{r}_\nu} \varphi_\beta \cdot \delta\mathbf{r}_\nu \geq 0 \tag{1.3}$$

при фиксированном значении времени ($\delta t = 0$), называются виртуальными перемещениями точек системы, причем знак равенства имеет место только для неосвобождающих перемещений, оставляющих систему на связи.

Отметим, что в этом проявляется существенное отличие виртуальных перемещений в случае двусторонних связей от виртуальных перемещений в случае односторонних связей. В первом случае виртуальные перемещения обратимы всегда, тогда как во втором – они необратимы, за исключением только виртуальных перемещений, оставляющих систему на связях; этим обстоятельством и обусловлен двойной знак: равно нулю или больше нуля. Образно говоря, в случае двусторонних связей система находится где-то внутри пространства конфигураций, и ее виртуальные перемещения могут осуществляться в любом допускаемом связями направлении, тогда как в случае односторонних связей система находится на границе пространства конфигураций, вследствие чего, когда виртуальные перемещения направлены внутрь, противоположно направленные перемещения невозможны как выводящие за пределы пространства конфигураций [3].

При движении механической системы под действием приложенных заданных сил $\mathbf{F}_\nu$ наложенные на систему связи действуют на различные точки M_ν системы с некоторыми силами $\mathbf{R}_\nu$, называемыми реакциями связей.

Аксиома связей. Действие связей, наложенных на механическую систему, можно заменить действием реакций связей $\mathbf{R}_\nu$.

Следствие. Если к заданным силам $\mathbf{F}_\nu$, действующим на точки системы, добавить силы реакций связей $\mathbf{R}_\nu$, то систему можно мыслить свободной от связей, вызывающих реакции $\mathbf{R}_\nu$.

Наложенные на систему связи зависят от физической природы осуществляющих связи механизмов, поэтому в механику должна быть введена характеристика связи в виде некоторой аксиомы, устанавливающей реально существующие опытные соотношения. В качестве такой аксиомы во многих случаях принимают определение идеальных связей: сумма элементарных работ реакций $\mathbf{R}_\nu$ идеальных связей на произвольном виртуальном перемещении системы $\delta\mathbf{r}$ равна нулю:

$$\sum_\nu \mathbf{R}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0$$

в случае двухсторонних связей, и равна нулю или больше нуля в случае односторонних связей:

$$\sum_\nu \mathbf{R}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu \geq 0 \tag{1.4}$$

причем знак равенства имеет место только для неосвобождающих перемещений.

Найдем теперь выражения реакций идельных связей. Рассмотрим сначала неосвобождающие виртуальные перемещения $\delta\mathbf{r}_\nu$, для которых в соотношениях (1.3) имеют место знаки равенства. Умножим каждое из уравнений (1.3) на произвольные множители $-\lambda_\alpha$ и $-\mu_\beta$, сложим их и прибавим к уравнению (1.4), в результате получим уравнение

$$\sum_\nu \left(\mathbf{R}_\nu - \sum_\alpha \lambda_\alpha \operatorname{grad}_{r_\nu} f_\alpha - \sum_\beta \mu_\beta \operatorname{grad}_{\dot{r}_\nu} \varphi_\beta \right) \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0$$

из которого находим выражения для реакций идеальных связей

$$\mathbf{R}_\nu = \sum_\alpha \lambda_\alpha \operatorname{grad}_{r_\nu} f_\alpha + \sum_\beta \mu_\beta \operatorname{grad}_{\dot r_\nu} \varphi_\beta, \quad \nu = 1, \ldots, N \tag{1.5}$$

где число множителей связей λ_α и μ_β равно числу $a + b$ уравнений связей (1.1). В суммах в правой части равенства (1.5) каждое слагаемое представляет собой действие одной какой-либо связи на данную точку M_ν

$$\mathbf{R}_\nu^\alpha = \lambda_\alpha \operatorname{grad}_{r_\nu} f_\alpha, \quad \mathbf{R}_\nu^\beta = \mu_\beta \operatorname{grad}_{\dot r_\nu} \varphi_\beta \tag{1.6}$$

В случае неудерживающих связей для их реакций сохраним выражения (1.6), вследствие чего элементарная работа реакций неудерживающих связей на виртуальном перемещении принимает такой же вид, как и для удерживающих связей, т.е.

$$\sum_\nu \mathbf{R}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = \sum_\alpha \lambda_\alpha \operatorname{grad}_{r_\nu} f_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_\nu + \sum_\beta \mu_\beta \operatorname{grad}_{\dot r_\nu} \varphi_\beta \cdot \delta \mathbf{r}_\nu$$

откуда в силу соотношения (1.4) следуют дополнительные условия для множителей

$$\lambda_\alpha \geq 0, \quad \mu_\beta \geq 0; \quad \alpha = 1, \ldots, a; \quad \beta = 1, \ldots, b \tag{1.7}$$

Следует отметить, что в случае освобождающих виртуальных перемещений левая часть соотношения (1.4) представляет собой элементарную работу реакций лишь в условном смысле, а именно, если предположить, что на протяжении перемещения реакции сохраняют свои первоначальные значения. В этом смысле на неравенство (1.4) можно смотреть как на указание на соотношение между направлениями перемещений и реакций, но не на работу реакций. Работа же реакции идеальной неудерживающей связи на виртуальном перемещении всегда равна нулю: когда перемещение оставляет систему на связи, то

$$\sum_\nu \operatorname{grad}_{r_\nu} f_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0, \quad \operatorname{grad}_{\dot r_\nu} \varphi_\beta \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0$$

когда же перемещение сводит систему со связи, т.е. когда

$$\sum_\nu \operatorname{grad}_{r_\nu} f_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_\nu > 0, \quad \operatorname{grad}_{\dot r_\nu} \varphi_\beta \cdot \delta \mathbf{r}_\nu > 0$$

тогда соответствующие реакции обращаются в нуль, и следовательно, $\lambda_\alpha = 0$, $\mu_\beta = 0$ ($\alpha = 1, \ldots, a$; $\beta = 1, \ldots, b$) [1].

В литературе неголономные неудерживающие связи рассматриваются в двух вариантах. В первом из них условия для координат и скоростей записываются в виде неравенств как и в данной статье. Во втором варианте неравенства связывают реакции связей, а координаты и скорости удовлетворяют уравнениям связей до тех пор, пока реакции принадлежат некоторому открытому множеству в пространстве реакций. Как только реакции выходят на границу этого множества, связи исчезают. Этот вариант в статье не рассматривается.

2. Принцип виртуальных перемещений, неравенство Фурье. Под положением равновесия системы, находящейся под действием данных сил, подразумевается такое положение системы, в котором она может неопределенное время находиться в покое относительно данной системы отсчета. Обычно рассматриваются положения равновесия систем, когда заданные силы $\mathbf{F}_\nu$ и связи не зависят явно от времени.

Дополним заданные силы $\mathbf{F}_\nu$ всеми силами реакций $\mathbf{R}_\nu$, тогда механическую систему согласно аксиоме связей можно мыслить как систему свободных точек, находящихся под действием сил $\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu$. Для свободных точек уравнения равновесия имеют вид [4]

$$\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu = 0, \quad \nu = 1, \ldots, N$$

Умножим скалярно эти уравнения на виртуальные перемещения $\delta\mathbf{r}_\nu$ точек системы, сложим их и, учитывая неравенство (1.4), получим соотношение

$$\sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu \le 0 \tag{2.1}$$

справедливое для произвольных виртуальных перемещений $\delta\mathbf{r}_\nu$ из положения равновесия. Соотношение (2.1) не только необходимо, но и достаточно [1, 2] для равновесия, т.е. оно выражает принцип, называемый принципом виртуальных перемещений: для равновесия системы сумма элементарных работ активных сил на любом виртуальном перемещении системы равна нулю или отрицательна; она равна нулю для неосвобождающих перемещений и отрицательна для освобождающих перемещений.

Этот принцип для случая двусторонних связей был установлен И. Бернулли, а для случая односторонних связей – Фурье [5].

В случае потенциальных сил, когда

$$\mathbf{F}_\nu = \operatorname{grad}_{r_\nu} U, \quad \nu = 1, \ldots, N$$

где $U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ – силовая функция, неравенство (2.1) принимает вид

$$\delta U \le 0 \tag{2.2}$$

3. Принцип Даламбера–Лагранжа. Рассмотрим движение системы, подчиненной идеальным связям (1.1) и (1.2). С учетом выражений (1.5) для реакций связей, находящихся в напряжении, уравнения движения запишем в виде

$$\mathbf{F}_\nu - m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu + \sum_\alpha \lambda_\alpha \operatorname{grad}_{r_\nu} f_\alpha + \sum_\beta \lambda_\beta \operatorname{grad}_{\dot{r}_\nu} \varphi_\beta = 0, \quad \nu = 1, \ldots, N \tag{3.1}$$

Умножая каждое из уравнений (3.1) скалярно на $\delta\mathbf{r}_\nu$ и суммируя по всем $\nu = 1, \ldots, N$, получаем

$$\sum_\nu (\mathbf{F}_\nu - m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu) \cdot \delta\mathbf{r}_\nu + \sum_\alpha \lambda_\alpha \delta f_\alpha + \sum_\beta \mu_\beta \operatorname{grad}_{\dot{r}_\nu} \varphi_\beta \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \tag{3.2}$$

откуда, принимая во внимание неравенство (1.4), получаем аналитическое выражение принципа Даламбера–Лагранжа

$$\sum_\nu (\mathbf{F}_\nu - m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu) \cdot \delta\mathbf{r}_\nu \le 0 \tag{3.3}$$

Сумма элементарных работ активных сил $\mathbf{F}_\nu$ и сил инерции $-m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu$ на любом виртуальном перемещении равна нулю или неположительна, смотря по тому, будут ли все связи удерживающие или среди них есть и неудерживающие; знак равенства имеет место в случае неосвобождающих виртуальных перемещений и знак меньше в случае освобождающих.

Принцип (3.3) выведен как следствие из уравнений движения (3.1). Можно, наоборот, принять (3.3) за исходное положение и из него получить, как следствие, уравнения движения (3.1).

Соотношение (3.3) определяет зависимость между виртуальными перемещениями $\delta\mathbf{r}_\nu$, допустимыми при наложенных связях (1.1) и (1.2), активными силами $\mathbf{F}_\nu$, приложенными к системе, и ускорениями $\ddot{\mathbf{r}}_\nu$, вызываемыми заданными силами при наложенных связях.

Когда все ускорения $\ddot{\mathbf{r}}_\nu = 0$ ($\nu = 1, \dots, N$) и, следовательно, система находится в равновесии, принцип Даламбера–Лагранжа (3.3) становится принципом (2.1) виртуальных перемещений (неравенством Фурье).

Величину $\mathbf{P}_\nu = \mathbf{F}_\nu - m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu$ называют иногда потерянной силой, при этом принцип Даламбера–Лагранжа принимает вид неравенства (2.1)

$$\sum_\nu \mathbf{P}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu \le 0 \tag{3.4}$$

В случае потенциальных активных сил принцип Даламбера–Лагранжа принимает вид

$$\sum_\nu (\operatorname{grad}_{r_\nu} U - m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu) \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = \delta U - \sum_\nu m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu \le 0 \tag{3.5}$$

где $U = U(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$.

Принцип (3.3) был впервые получен для удерживающих связей Лагранжем [6] путем соединения принципов Даламбера и И. Бернулли, а для неудерживающих связей – М.В. Остроградским [7].

4. Принцип Гаусса наименьшего принуждения [8]. В принципе Даламбера–Лагранжа сравниваются одновременные ($\delta t = 0$) положения $\mathbf{r}_\nu$ и $\mathbf{r}'_\nu$ системы в действительном и любом бесконечно близком кинематически возможном движениях, различающиеся на величины $\delta\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}'_\nu - \mathbf{r}_\nu$, удовлетворяющие условиям (1.3). При этом принцип (3.3) не имеет характера принципа стационарности (экстремальности) какой-либо функции.

Гауссу удалось преобразовать принцип Даламбера–Лагранжа в принцип наименьшего принуждения путем сужения множества сравниваемых движений: действительное движение сравнивается с такими кинематически возможными движениями, при которых в данный момент времени t радиус-векторы $\mathbf{r}_\nu$ и скорости $\dot{\mathbf{r}}_\nu$ точек M_ν системы имеют такие же величины, как и в действительном движении. Эти движения Гаусс назвал мыслимыми – для них рассматриваются те значения ускорений точек $\ddot{\mathbf{r}}_\nu$, которые возможны при заданных конфигурации и скорости системы.

В момент времени $t + \tau$, где τ – малая величина, имеем

$$\mathbf{r}_\nu(t+\tau) = \mathbf{r}_\nu(t) + \dot{\mathbf{r}}_\nu(t)\tau + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}_\nu(t)\tau^2 + \dots$$

Пренебрегая членами третьего и более высоких порядков по τ, при варьировании по Гауссу в момент времени $t + dt$ получаем

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{r}}'_\nu - \ddot{\mathbf{r}}_\nu)(dt)^2 = \frac{1}{2}\delta\ddot{\mathbf{r}}_\nu(dt)^2$$

Подставив $\delta\mathbf{r}_\nu$ в выражение (3.3) принципа Даламбера–Лагранжа, будем иметь

$$\sum_\nu (\mathbf{F}_\nu - m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu) \cdot \delta\ddot{\mathbf{r}}_\nu \le 0 \tag{4.1}$$

или, учитывая, что заданные активные силы $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ не зависят от ускорений $\ddot{\mathbf{r}}_\nu$, и вводя в рассмотрение функцию

$$Z = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\left(\ddot{\mathbf{r}}_\nu - \frac{\mathbf{F}_\nu}{m_\nu}\right)^2 \tag{4.2}$$

перепишем соотношение (4.1) в виде

$$\delta Z = \sum_\nu m_\nu\left(\ddot{\mathbf{r}}_\nu - \frac{\mathbf{F}_\nu}{m_\nu}\right)\cdot \delta\ddot{\mathbf{r}}_\nu \geq 0 \tag{4.3}$$

откуда $\delta^2 Z = \sum\limits_\nu m_\nu(\delta\ddot{\mathbf{r}}_\nu)^2 > 0.$

Величину (4.2) Гаусс назвал принуждением и принял за меру отклонения действительного движения от движения системы, освобожденной от всех связей. Следовательно, для действительного движения принуждение Z имеет наименьшее значение в классе мыслимых движений – принцип наименьшего принуждения Гаусса. Для голономных и линейных неголономных связей принцип Гаусса имеет ту же общность, что и принцип Даламбера–Лагранжа [2].

5. Видоизменение принципа Гаусса – принцип Четаева [9]. Н.Г. Четаев предложил интересное видоизменение принципа Гаусса. Наряду с действительным движением системы рассмотрим класс мыслимых (μ) по Гауссу движений системы за промежуток времени от t до $t + dt$, определенных в момент t величинами $\mathbf{r}_\nu$, $\dot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{v}_\nu$, и наложенными на системы связями (1.1) и (1.2)

Работа заданных сил $\mathbf{F}_\nu$ на бесконечно малом перемещении

$$\mathbf{r}_\nu(t + dt) - \mathbf{r}_\nu(t) = \left(\dot{\mathbf{r}}_\nu + \frac{1}{2}\delta\dot{\mathbf{r}}_\nu\right)dt$$

мыслимого движения равна

$$\sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \left(\dot{\mathbf{r}}_\nu + \frac{1}{2}\delta\dot{\mathbf{r}}_\nu\right)dt$$

где $\delta\dot{\mathbf{r}}_\nu$ – изменение скорости точки M_ν за промежуток времени dt для мыслимого движения. Из этого выражения вычтем выражение работы на рассматриваемом перемещении сил $m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu$, которых было бы достаточно для создания действительного движения, если бы точки M_ν были совершенно свободными:

$$\sum_\nu m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \left(\dot{\mathbf{r}}_\nu + \frac{1}{2}\delta\dot{\mathbf{r}}_\nu\right)dt$$

В результате получим выражение

$$A_\mu = \sum_\nu (\mathbf{F}_\nu - m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu)\cdot\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu + \frac{1}{2}\delta\dot{\mathbf{r}}_\nu\right)dt \tag{5.1}$$

работы на элементарном цикле, состоящем из прямого мыслимого движения в поле заданных сил и движения попятного (обратного) в поле сил, которых было бы достаточно для создания действительного движения, если бы точки системы были совершенно свободными.

Работа на аналогичном цикле, построенном для действительного движения, равна

$$A = \sum_{\nu}(\mathbf{F}_\nu - m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu)\cdot\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu + \frac{1}{2}d\dot{\mathbf{r}}_\nu\right)dt \tag{5.2}$$

Вычитая равенство (5.2) из равенства (5.1), получаем

$$A_\mu - A = \sum_{\nu}(\mathbf{F}_\nu - m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu)\cdot(\delta\dot{\mathbf{r}}_\nu - d\dot{\mathbf{r}}_\nu)\frac{dt}{2} \tag{5.3}$$

Обозначим через Δ изменение при переходе от действительного движения к мало отличному от него мыслимому движению. Так как силы $\mathbf{F}_\nu$ не зависят от ускорений, то $\Delta\mathbf{F}_\nu = 0$, и уравнение (5.3) можно представить в виде

$$\Delta A = \frac{(dt)^2}{2}\sum_{\nu}(\mathbf{F}_\nu - m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu)\cdot\Delta\ddot{\mathbf{r}}_\nu = -\Delta\frac{(dt)^2}{2}\sum_{\nu}\frac{1}{2m_\nu}(\mathbf{F}_\nu - m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu)^2 \tag{5.4}$$

Согласно соотношению (4.1) получаем

$$\Delta A \le 0$$

Применяя к этому неравенству операцию Δ, находим

$$\Delta^2 A = -\frac{(dt)^2}{2}\sum_{\nu}m_\nu(\Delta\ddot{\mathbf{r}}_\nu)^2 < 0 \tag{5.5}$$

Следовательно, справедлив принцип Четаева наибольшей работы: работа A на элементарном цикле, состоящем из прямого движения в поле заданных сил и движения обратного в поле сил, которых было бы достаточно для создания действительного движения, если бы механическая система была совершенно свободной, для действительного движения имеет максимум в классе мыслимых по Гауссу движений.

6. Принцип Журдена [10]. В отличие от принципов Даламбера–Лагранжа, Гаусса и Четаева в принципе Журдена действительное движение сравнивается с теми из кинетически возможных движений, для которых в данный момент времени t радиус-векторы $\mathbf{r}_\nu$ точек системы такие же, как и в действительном движении.

При варьировании по Журдену в момент $t + dt$ будем иметь

$$\delta\mathbf{r}_\nu = (\dot{\mathbf{r}}'_\nu - \dot{\mathbf{r}}_\nu)dt = \delta\dot{\mathbf{r}}_\nu dt \tag{6.1}$$

Подставляя это выражение в выражение (3.3) принципа Даламбера–Лагранжа, получаем принцип Журдена

$$\sum_{\nu}(\mathbf{F}_\nu - m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu)\cdot\delta\dot{\mathbf{r}}_\nu dt \le 0 \tag{6.2}$$

7. Принцип Гамильтона–Остроградского. Рассмотрим движение голономной механической системы в промежутке времени от t_0 до t_1, а также для каждого момента t виртуальные перемещения $\delta\mathbf{r}_\nu$ из положения $\mathbf{r}_\nu$, занимаемого в действительном движении. Виртуальные перемещения $\delta\mathbf{r}_\nu$ будем предполагать функциями t, принадлежащими классу C_2 и обращающимися в нуль в моменты времени t_0 и t_1, соответствующие возможным положениям A_0 и A_1 системы в конфигурационном пространстве. Последовательность положений $\mathbf{r}_\nu + \delta\mathbf{r}_\nu$ можно рассматривать как варьированный, или окольный путь, который, однако, для неголономной системы не удовлетворяет уравнениям связей [1].

Вариация кинетической энергии системы равна

$$\delta T = \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \delta\dot{\mathbf{r}}_\nu, \quad \text{причем} \quad \delta\dot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{d}{dt}\delta\mathbf{r}_\nu$$

Интегрируя по t, будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_\nu m\dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}_\nu}{dt} dt = \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_\nu m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu dt$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства равно нулю, так как по условию $\delta\mathbf{r}_\nu = 0$ в моменты времени t_0 и t_1, вследствие чего

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu \right) dt = -\int_{t_0}^{t_1} \sum_\nu (m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{F}_\nu) \cdot \delta\mathbf{r}_\nu dt$$

Правая часть этого равенства неположительна согласно принципу Даламбера–Лагранжа (3.3), так что

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu \right) dt \le 0; \quad \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, t_1 \tag{7.1}$$

Принцип Гамильтона–Остроградского: интеграл по времени от суммы вариации кинетической энергии и работы активных сил на виртуальных перемещениях $\delta\mathbf{r}_\nu$ для действительного движения равен нулю или отрицателен по сравнению с движениями по окольным путям, идущим между теми же положениями A_0 и A_1, если переход системы по всем путям совершается в один и тот же промежуток времени $t_1 - t_0$, причем t_0 и t_1 – общие для всех путей начальный и конечный моменты времени.

В случае потенциальных активных сил, когда $\mathbf{F}_\nu = \operatorname{grad}_{r_\nu} U$ ($\nu = 1, \ldots, N$), получаем принцип Гамильтона

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt \le 0; \quad \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, t_1 \tag{7.2}$$

где $L = T + V$ – функция Лагранжа, т.е. для действительного движения

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L dt \le 0; \quad \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, t_1 \tag{7.3}$$

Принцип (7.1) был первоначально установлен Гамильтоном [11] для случая стационарных голономных систем с двусторонними связями, находящихся под действием потенциальных сил, а затем распространен М.В. Остроградским [12] на нестационарный случай, а также на случай непотенциальных сил. Для голономных систем, стесненных односторонними связями, принципы (7.1) и (7.3) были исследованы Н.Е. Ставраковой [13].

8. Принцип наименьшего действия в форме Лагранжа. Первая словесная формулировка принципа наименьшего действия была дана Мопертюи (1744 г.), который затем (1746 г.) объявил его универсальным законом движения и покоя [14]: "Общий принцип. Когда в природе происходит некоторое изменение, количество действия, необходимое для этого изменения, является наименьшим возможным. Количество действия есть произведение массы тел на их скорость и на расстояние, которое они пробегают."

Математическую формулировку принципа наименьшего действия для случая материальной точки дал Эйлер [15]. Лагранж [6] вывел принцип для системы точек, стесненной двусторонними связями.

Будем далее предполагать, что наложенные на систему голономные связи стационарны, причем удары, возможные в системе при выходе на односторонние связи или сходе с них, абсолютно упругие (коэффициент восстановления $\delta = 1$) [1]; приложенные активные силы потенциальны с не зависящей от времени силовой функцией $U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$. При этих условиях существует интеграл энергии

$$H = T - U = h = \text{const} \tag{8.1}$$

В самом деле, при указанных условиях действительные перемещения $d\mathbf{r}_\nu = \dot{\mathbf{r}}_\nu dt$ ($\nu = 1, \ldots, N$) находятся среди виртуальных перемещений. Умножая скалярно на $d\mathbf{r}_\nu$ уравнения (3.1) и суммируя по всем ν, получаем при сделанных предположениях уравнение

$$\sum_\nu m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu - dU = d(T-U) = 0$$

откуда следует интеграл (8.1). Если соотношения между декартовыми и обобщенными координатами не зависят от времени, то функция Лагранжа $L(q, \dot{q}) = T + V$ будет также не зависеть от времени, и интеграл (8.1) будет существовать и в этом случае.

Предоставленная самой себе механическая система может выбирать свои движения из движений с данным запасом полной энергии h, поэтому множество сравниваемых движений можно ограничить условием (8.1) [2].

Действительное движение будем варьировать так, чтобы начальное A_0 и конечное A_1 положения системы оставались неизменными. Варьированную траекторию получим, сообщив в каждый момент времени t виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r}_\nu(\delta q_i)$ относительно действительной траектории, причем положению $\mathbf{r}_\nu + \delta\mathbf{r}_\nu(q_i + \delta q_i)$ на сравниваемой траектории соответствует момент времени $t + \delta t$. Так как полная энергия H должна быть равной h на всех рассматриваемых траекториях, то отсюда находится скорость в положении $\mathbf{r}_\nu + \delta\mathbf{r}_\nu$. Таким образом, в отличие от предыдущего, время варьируется, и продолжительность сравниваемых движений будет отличаться от продолжительности действительного движения между точками A_0 и A_1. Будем считать далее $\delta\mathbf{r}_\nu(\delta q_i)$, δt функциями времени t класса C_2 [16].

Проинтегрируем выражение (3.5) принципа Даламбера–Лагранжа по t в пределах от t_0 до t – момента достижения конечного положения A_1. Получим

$$0 \ge \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta U - \sum_\nu m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu \right) dt$$

Так как

$$\int_{t_0}^{t_1} \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu dt = \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \delta\dot{\mathbf{r}}_\nu dt; \quad \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, t_1$$

то предыдущее соотношение принимает вид

$$0 \geq \int_{t_0}^{t_1} (\delta U + \delta T) dt; \quad \delta T = \sum_{\nu} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_\nu$$

Варьируя интеграл энергии (8.1), получаем $\delta T = \delta U$, и следовательно, последнее соотношение можно представить в виде

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt \leq 0; \quad \delta \mathbf{r}_\nu = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, t_1 \tag{8.2}$$

Оно выражает принцип наименьшего действия в форме Лагранжа для идеальных гладких односторонних связей.

Действительное движение, будучи сравнено с другими движениями, мало от него отклоняющимися и протекающими с той же постоянной энергией H, удовлетворяет условию (8.2); при этом вариации положений должны быть виртуальными перемещениями, а начальное и конечное положения системы остаются неварьированными.

9. Принцип наименьшего действия в форме Якоби. Якоби [17] исключил время t из выражения действия (8.2) с помощью интеграла энергии и придал принципу наименьшего действия геометрический характер.

Рассмотрим конфигурационное пространство, определенное линейным элементом [2]

$$ds^2 = \sum_{ij}^{n} a_{ij} dq_i dq_j$$

и представим кинетическую энергию системы в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} t'^2 \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2, \quad t' = \frac{dt}{d\tau} \tag{9.1}$$

где τ – некоторый параметр. Пусть семейство поверхностей $\tau(q_1, \ldots, q_n) = c$ пересекает действительную траекторию системы, а также бесконечно близкие траектории, проведенные через точки A_0 и A_1 конфигурационного пространства. Каждую из этих кривых можно считать заданной своими координатами, представленными функциями от τ. Виртуальные перемещения, переводящие систему их какой-либо точки действительной траектории в точку сравниваемой траектории, пусть относятся к одному и тому же значению τ, причем положения A_0 и A_1 отвечают значениям τ_0 и τ_1 соответственно.

Выразим τ' из равенства (3.1) и заменим T на $U + h$, тогда получим

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{T}} \frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{2(U+h)}} \frac{ds}{d\tau} \tag{9.2}$$

и представим соотношение (8.2) в виде

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2(U+h)} \frac{ds}{d\tau} d\tau \leq 0, \quad \delta q_i = 0 \quad \text{при} \quad \tau = \tau_0, \tau_1 \tag{9.3}$$

Таким образом, вариационный принцип Лагранжа с закрепленным нижним и свободным верхним пределами преобразуется в вариационный принцип Якоби с закрепленными пределами τ_0 и τ_1 и закрепленными концами A_0 и A_1.

Уравнения Эйлера–Лагранжа для задачи (9.3) будут следующими [2]:

$$\frac{d}{d\tau}\left[\sqrt{2(U+h)}\frac{\partial}{\partial q_s'}\sqrt{\sum_{ij}a_{ij}q_i'q_j'}\right]-\frac{\partial}{\partial q_s}\left[\sqrt{2(U+h)}\sqrt{\sum_{ij}a_{ij}q_i'q_j'}\right] = 0, \quad s = 1, \ldots, n \qquad (9.4)$$

($q_i' = dq_i/d\tau$). Они представляют собою дифференциальные уравнения действительной траектории в пространстве конфигураций. Движение во времени находится путем интегрирования уравнения (9.2), что дает t как функцию параметра τ.

Если на рассматриваемой траектории $dt \neq 0$, то в качестве параметра τ можно выбрать время t, измеренное на действительной траектории, для которой имеет место интеграл (8.1). При этом уравнения (9.4) принимают вид уравнений движения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s} = \frac{\partial U}{\partial q_s}, \quad s = 1, \ldots, n$$

что и доказывает принцип Якоби.

Отметим [2], что в механических задачах нельзя наперед фиксировать величины t_0, t_1, A_0, A_1 и h

10. Принцип Суслова – Воронца для неголономных систем. Рассмотрим механическую систему с обобщенными координатами q_σ ($\sigma = 1, \ldots, r+b$), которые тождественно удовлетворяют всем голономным связям. Пусть, кроме того, система подчинена b неголономным связям [1]

$$\dot{q}_{r+\beta}-\sum_{\rho=1}^{r}u_{\beta\rho}(q_\sigma, t)\dot{q}_\rho-u_\beta(q_\sigma, t)\geq 0, \quad \beta = 1, \ldots, b \qquad (10.1)$$

так что виртуальные перемещения удовлетворяют условиям

$$\delta q_{r+\beta}-\sum_{\rho=1}^{r}u_{\beta\rho}\delta q_\rho\geq 0, \quad \beta = 1, \ldots, b \qquad (10.2)$$

Операции дифференцирования и варьирования переместительны лишь для $\rho = 1, \ldots, r$, т.е.

$$\frac{d}{dt}\delta q_\rho = \delta\dot{q}_\rho, \quad \rho = 1, \ldots, r$$

а для остальных b зависимых скоростей из неравенств (10.1) и (10.2) выводятся соотношения

$$\frac{d}{dt}\delta q_{r+\beta}-\delta\dot{q}_{r+\beta}\equiv\sum_{\rho=1}^{r}[\dot{u}_{\beta\rho}\delta q_\rho-\dot{q}_\rho\delta u_{\beta\rho}]-\delta u_\beta = \delta B_\beta, \quad \beta = 1, \ldots, b \qquad (10.3)$$

Символом δB_β обозначены выражения, линейные и однородные относительно δq_β. Если уравнения (10.1) интегрируются, то все $\delta B_\beta \equiv 0$.

Выражение принципа Даламбера–Лагранжа в обобщенных координатах

$$\delta U+\sum_{\sigma=1}^{r+b}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)\delta q_\beta\leq 0$$

проинтегрируем от t_0 до t_1

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta U + \sum_{\sigma=1}^{r+b}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\sigma} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)\delta q_\beta\right]dt \le 0 \tag{10.4}$$

считая, что для $t = t_0$ и $t = t_1$ все независимые вариации δq_ρ ($\rho = 1, \ldots, r$), а следовательно, и зависимые вариации δq_{r+b} равны нулю ($\beta = 1, \ldots, b$).

Будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho}\delta q_\rho dt = \left|_{t_1}^{t_0}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho}\delta q_\rho - \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho}\frac{d}{dt}\delta q_\rho dt = -\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho}\delta \dot{q}_\rho dt, \quad \rho = 1, \ldots, r\right.$$

а также с учетом соотношений (10.3)

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dT}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{r+\beta}}\delta q_{r+\beta}dt = \left|_{t_1}^{t_0}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{r+\beta}}\delta q_{r+\beta} - \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{r+\beta}}\frac{d}{dt}\delta q_{r+\beta}dt =\right.$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{r+\beta}}\delta \dot{q}_{r+\beta}dt - \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{r+\beta}}\delta B_\beta dt, \quad \beta = 1, \ldots, b$$

Подставляя найденные результаты в соотношение (10.4), получаем принцип Суслова–Воронца [1, 18]

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta U + \delta T + \sum_{\beta=1}^{b}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{r+\beta}}\delta B_\beta\right)dt \le 0 \tag{10.5}$$

Автор благодарит В.Ф. Журавлева, обратившего внимание на монографию [19].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.–Л. Гостехиздат, 1946. 655 с.
2. *Четаев Н.Г.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1987. 367 с.
3. *Lanczos K.* The Variational Principles of Mechanics. Toronto: Univ. Press, 1962 = *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965. 408 с.
4. *Newton I.* Mathematical Principles of Natural Philosophy (Philosophiae naturalis principia methematica). Пер. с латин. Э. Мотта. 1793; пересмотренное издание Ф. Кэджори (Cajori F.). Berkeley, Caifornia: Univ. California Press, 1947. 680 p. = *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. Пер. с латин. и комментарии А.Н. Крылова. М.: Наука, 1989. 688 с.
5. *Fourier J.B.* Jos. Mémoire sur la statique, contenant la démonstration du principe des vitesses virtuelles et la théorie des moments // École Polytechn. J. 1797–1798. T. 2. P. 20–60.
6. *Lagrange G.* Mécanique Analitique. Paris: Desaint, 1788 = *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 594 с.
7. *Остроградский М.В.* Общие соображения относительно моментов сил// Избранные труды. Л.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 205–229.
8. *Gauss C.F.* Über ein neues allgemeines Grungesetz der Mechanik // J. Reine Angew. Math. 1829. Bd. 4; Werke. 1867. Bd. 5. S. 25–28. = *Гаусс К.* Об одном новом общем принципе механики// Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 170–172.
9. *Четаев Н.Г.* Одно видоизменение принципа Гаусса// ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 1. С. 11, 12.

10. *Jourdain P.E.* Note on an analogue of Gauss principle of least constraint // Quart. J. Pure Appl. Mathematics. 1909. V. 40. P. 153–157.
11. *Hamilton W.R.* On the application to dynamics of a general mathematical method previously applied to optics // Rept 4th Meeting Brit. Assoc. Advancement of Sci. Edinburgh, 1934. L., 1935. P. 513–518; Math. Papers. 1940. V. 2. P. 212–216 = *Гамильтон У.* О приложении к динамике общего математического метода, ранее предложенного к оптике // Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 284–288.
12. *Osrtogradsky M.* Sur les integrales des équations générales de la dynamique // Bull. Cl. phys.-math. de l'Acad des sc: de St. Pbg. 1850. T. 8 № 3. P. 33–43.
13. *Ставракова Н.Е.* Принцип Гамильтона–Остроградского для системы с односторонними связями // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 738–741.
14. *Maupertuis P.-L.M.* Les lois de mouvement et du repos déduites d'un principe métaphysique // Mem. Acad. Roy. Sci. et Belles Lettres. 1746. P. 267–294. = *Мопертюи П.* Законы движения и покоя, выведенные из метафизического принципа // Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 41–55.
15. *Euler L.* Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isopermetrici latissmo sensu accepti // Bousquet, Lausannae et Genevae, 1744 = *Эйлер Л.* Об определении движения брошенных тел в несопротивляющейся среде методом максимумов и минимумов // Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 31–40.
16. *Hölder O.* Über die Primzipien von Hamilton und Maupertuis // Nachricht. Köm. Ges. Wissensch. Göttingen. Math.-Phys. Kl. 1896. Bd. 2. S. 122–157. = *Гёльдер О.* О принципах Гамильтона и Мопертюи // Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 538–563.
17. *Jacobi K.G.* Vorlesungen über Dynamik. Berlin: Reimer, 1884 = *Якоби К.* Лекции по динамике. Л.; М.: ОНТИ, 1936. 270 с.
18. *Воронец П.В.* Об уравнениях движения для неголономных систем // Мат. сб. 1901. Т. 22. Вып. 4. С. 659–686.
19. *Журавлев В.Ф., Фуфаев Н.А.* Механика систем с неудерживающими связями. М.: Наука, 1993. 240 с.

Москва
e-mail: vvrum@ccas.ru

Поступила в редакцию
14. XI. 2005