

УДК 531.36

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТЯЖЕЛОГО СИММЕТРИЧНОГО  
 ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА СТРУНЕ

РУБАНОВСКИЙ В. П., РУМЯНЦЕВ В. В.

Рассматриваются стационарные движения тяжелого динамически симметричного твердого тела, подвешенного шарнирно к неподвижной точке на невесомой абсолютно гибкой нерастяжимой струне с точкой подвеса на оси симметрии. Строится связь известных первых интегралов уравнений движения, условия экстремума которой приводят к решениям уравнений движения, описывающим стационарные движения твердого тела, представляющие собою перманентные вращения и регулярные прецессии. Условия минимума связки интегралов дают достаточные условия устойчивости стационарных движений.

1. Рассмотрим движение в однородном поле сил тяжести динамически симметричного твердого тела с центром масс  $G$  на оси симметрии, шарнирно подвешенного к неподвижной точке  $O_1$  на абсолютно гибкой нерастяжимой безынерционной струне с точкой подвеса  $O$  на оси симметрии.

Уравнения движения твердого тела допускают следующие интегралы [1]:

$$V_1 = \omega \cdot \Theta \cdot \omega + mv^2 + 2mg(l - a) \cdot \gamma = \text{const} \quad (1.1)$$

$$V_2 = [\Theta \cdot \omega + (l - a) \times mv] \cdot \gamma = \text{const}, \quad V_3 = \gamma^2 = 1, \quad V_4 = \omega_3 = \omega = \text{const}$$

представляющие интегралы энергии, площадей, геометрический и постоянства проекции мгновенной угловой скорости тела на его ось симметрии. Здесь введены обозначения:  $m$  и  $\Theta$  — масса и центральный тензор инерции тела с диагональными элементами  $A_1 = A_2, A_3$ ,  $v$  и  $\omega$  — скорость центра масс и мгновенная угловая скорость тела,  $\gamma$  и  $e$  — единичные векторы восходящей вертикали и направления струны от точки  $O_1$  к точке  $O$ ,  $a$  — радиус-вектор точки подвеса  $O$  относительно центра масс  $G$ ,  $g$  и  $l$  — ускорение силы тяжести и длина струны. Все векторы будем задавать их проекциями  $v_s, \omega_s, \gamma_s, e_s, a_s$  ( $s=1, 2, 3$ ) на оси правой системы осей координат  $Gx_1x_2x_3$  с единичными векторами  $i_s$ , жестко связанной с телом, оси которой направлены по главным центральным осям инерции, причем  $a_1 = a_2 = 0, a_3 = a > 0$ . Кроме того, понадобятся проекции вектора  $e$  также на три другие ортогональные оси, которые получим представляя этот вектор в виде  $e = x\gamma + y i_3 \times \gamma / \sqrt{1 - \gamma_3^2} + z\gamma \times (i_3 \times \gamma) / \sqrt{1 - \gamma_3^2}, x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Умножая скалярно это равенство на  $i_3$ , получаем

$$e_3 = x\gamma_3 - [(1 - \gamma_3^2)(1 - x^2 - y^2)]^{1/2}, \quad x = e \cdot \gamma = -\cos \alpha$$

$$y = e \cdot i_3 \times \gamma / \sqrt{1 - \gamma_3^2}, \quad \gamma_3 = \gamma \cdot i_3 = \cos \vartheta \quad (1.2)$$

где  $\alpha$  — угол между струной и нисходящей вертикалью,  $\vartheta$  — угол между осью  $x_3$  и восходящей вертикалью.

Рассмотрим связку первых интегралов (1.1), записанную с точностью до несущественной аддитивной постоянной ( $\lambda$  — параметр)

$$2V = V_1 - 2\lambda V_2 + A_1 \lambda^2 V_3 =$$

$$=A_1[(\omega_1-\lambda\gamma_1)^2+(\omega_2-\lambda\gamma_2)^2]+m[\mathbf{v}-\lambda\boldsymbol{\gamma}\times(\mathbf{l}e-\mathbf{a})]^2- \\ -m\lambda^2[\boldsymbol{\gamma}\times(\mathbf{l}e-\mathbf{a})]^2+2mg\boldsymbol{\gamma}\cdot(\mathbf{l}e-\mathbf{a})-2A_3\omega\lambda\gamma_3+A_1\lambda^2\gamma_3^2 \quad (1.3)$$

Вводя вместо  $\omega_i$  и  $\mathbf{v}$  новые переменные

$$\Omega_i=\omega_i-\lambda\gamma_i \quad (i=1, 2), \quad \mathbf{u}=\mathbf{v}-\lambda\boldsymbol{\gamma}\times(\mathbf{l}e-\mathbf{a}) \quad (1.4)$$

и учитывая (1.2), представим (1.3) в виде

$$2V(\Omega_1, \Omega_2, u_1, u_2, u_3, x, y, \gamma_3)=A_1(\Omega_1^2+\Omega_2^2)+m(u_1^2+u_2^2+u_3^2)+ \\ +m\lambda^2l^2x^2+2mglx-2mal\lambda^2[(1-\gamma_3^2)(1-x^2-y^2)]^{1/2}- \\ -2(mga+A_3\omega\lambda)\gamma_3+(A_1+ma^2)\lambda^2\gamma_3^2 \quad (1.5)$$

Рассмотрим условия стационарности интеграла (1.5) по отношению к введенным переменным:

$$\partial V/\partial\Omega_i=A_1\Omega_i=0 \quad (i=1, 2), \quad \partial V/\partial u_j=mu_j=0 \quad (j=1, 2, 3) \\ \partial V/\partial x=ml[\lambda^2lx+g+a\lambda^2x(1-\gamma_3^2)^{1/2}(1-x^2-y^2)^{-1/2}]=0 \\ \partial V/\partial y=mal\lambda^2y(1-\gamma_3^2)^{1/2}(1-x^2-y^2)^{-1/2}=0 \\ \partial V/\partial\gamma_3=(A_1+ma^2)\lambda^2\gamma_3-mga-A_3\omega\lambda+mal\lambda^2\gamma_3(1-\gamma_3^2)^{-1/2}(1-x^2-y^2)^{1/2}=0 \quad (1.6)$$

Решения уравнений (1.6) определяются однозначно во всех точках пространства переменных, в которых гессиян функции  $V$  отличен от нуля. Уравнения (1.6) имеют решения вида

$$\Omega_i=0 \quad (i=1, 2), \quad u_j=0 \quad (j=1, 2, 3), \quad x=x_0, \quad y=y_0=0, \quad \gamma_3=\gamma_0 \quad (1.7)$$

причем постоянные  $x_0, \gamma_0$  удовлетворяют соотношениям

$$\lambda^2x_0[l+a(1-\gamma_0^2)^{1/2}(1-x_0^2)^{-1/2}]+g=0 \quad (1.8) \\ (A_1+ma^2)\lambda^2\gamma_0-mga-A_3\omega\lambda+mal\lambda^2\gamma_0(1-\gamma_0^2)^{-1/2}(1-x_0^2)^{1/2}=0$$

при произвольных значениях постоянных  $\lambda, \omega$ . Следовательно, будем иметь, вообще говоря, двухпараметрическое семейство решений (1.7).

В исходных переменных решения (1.7) имеют вид

$$\omega_i=\lambda\gamma_i \quad (i=1, 2), \quad \mathbf{v}=\lambda\boldsymbol{\gamma}\times(\mathbf{l}e-\mathbf{a}), \quad x=x_0, \quad y=y_0=0, \quad \gamma_3=\gamma_0 \quad (1.9)$$

Сравнивая первые два равенства (1.9) с известными кинематическими уравнениями Эйлера, приходим к заключению, что постоянная  $\lambda$  представляет собой угловую скорость  $\dot{\psi}$  прецессии твердого тела. Таким образом, решение (1.9) описывает равномерное вращение струны и оси симметрии тела как одного твердого тела вокруг вертикали с угловой скоростью  $\lambda$ , причем струна и ось симметрии расположены в одной и той же вертикальной плоскости и образуют постоянные углы  $\alpha_0=-\arcsin \cos x_0$  и  $\vartheta_0=\arcsin \cos \gamma_0$  с нисходящей и восходящей вертикалями, соответственно, в диапазонах  $-\pi/2 < \alpha_0 < \pi/2, 0 \leq \vartheta_0 \leq 2\pi$ .

Переменные (1.4) представляют собою отклонения значений проекций мгновенной угловой скорости на оси  $x_i$  ( $i=1, 2$ ) и вектора скорости центра масс от значений этих переменных в стационарном движении. Так как проекция мгновенной угловой скорости на ось симметрии  $\omega_3=\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\vartheta$ , где  $\dot{\varphi}$  — угловая скорость собственного вращения, то стационарные движения тела на струне подразделяются на два класса — перманентные вращения и регулярные прецессии, в зависимости от того, равна нулю или отлична от нуля постоянная  $\mu=\dot{\varphi}=\omega-\lambda\gamma_0$ .

2. В случае перманентного вращения, когда  $\mu=0, \omega=\lambda\gamma_0$ , струна и тело вращаются вокруг вертикали как одно твердое тело с угловой скоростью  $\lambda$ . Уравнения (1.8) в переменных  $\alpha_0, \vartheta_0$  принимают вид

$$\lambda^2(l \sin \alpha_0 + a \sin \vartheta_0) \cos \alpha_0 = g \sin \alpha_0 \quad (2.1)$$

$$(A_1 - A_3)\lambda^2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 + ma\lambda^2 (l \sin \alpha_0 + a \sin \vartheta_0) \cos \vartheta_0 = mga \sin \vartheta_0$$

и позволяют определить однопараметрическое семейство решений  $\alpha_0 = \alpha_0(\lambda^2)$ ,  $\vartheta_0 = \vartheta_0(\lambda^2)$ . Среди решений этих уравнений имеются, в частности, решения  $\alpha_0 = 0$ ,  $\vartheta_0 = 0$ ,  $\pi$  при произвольной величине  $\lambda^2 \geq 0$ , описывающие равномерные вращения тела при расположении струны и оси симметрии па одной вертикали, а также при  $A_1 = A_3$  решения вида [2]:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \vartheta_0, & \cos \alpha_0 &= \cos \vartheta_0 = g/(\lambda^2(l+a)) \\ \vartheta_0 &= \pi + \alpha_0, & \cos \alpha_0 &= g/(\lambda^2(l-a)) \quad (l > a) \end{aligned} \quad (2.2)$$

при  $\lambda^2 > g(l+a)^{-1}$  или  $\lambda^2 > g(l-a)^{-1}$ , соответственно, описывающие равномерные вращения при расположении струны и оси симметрии вдоль одной прямой.

В общем случае уравнения (2.1) совпадают с уравнениями (5.2) работы [2] для случая  $\delta = \rho = 0$ , подробно исследованными в [2].

Отметим, что можно также обратить постановку задачи: задать величины  $\alpha_0$  и  $\vartheta_0$  таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{l \sin \alpha_0 + a \sin \vartheta_0} = \frac{ma(1 - \operatorname{tg} \alpha_0 \operatorname{ctg} \vartheta_0)}{(A_1 - A_3) \cos \vartheta_0} > 0 \quad (2.3)$$

тогда соответствующая величина  $\lambda^2$  будет равна величине (2.3), умноженной на  $g$ .

В случае регулярной прецессии, когда  $\mu \neq 0$  — произвольная постоянная и  $\omega = \mu + \lambda \gamma_0$ , твердое тело вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью  $\mu$  и одновременно струна и ось симметрии вращаются как одно твердое тело вокруг вертикали с угловой скоростью  $\lambda$ . Уравнения (1.8) в переменных  $\alpha_0$ ,  $\vartheta_0$  принимают вид

$$\begin{aligned} \lambda^2 (l \sin \alpha_0 + a \sin \vartheta_0) \cos \alpha_0 &= g \sin \alpha_0 \\ (A_1 - A_3)\lambda^2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 - A_3 \lambda \mu \sin \vartheta_0 + ma\lambda^2 (l \sin \alpha_0 + \\ &+ a \sin \vartheta_0) \cos \vartheta_0 = mga \sin \vartheta_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

и позволяют определить двухпараметрическое семейство решений  $\alpha_0 = \alpha_0(\lambda, \mu)$ ,  $\vartheta_0 = \vartheta_0(\lambda, \mu)$ . Среди решений этих уравнений имеется, в частности, однопараметрическое семейство решений вида (2.2), если  $\mu = (A_1/A_3 - 1)\lambda \cos \vartheta_0$ , описывающее регулярные прецессии при расположении струны и оси симметрии тела вдоль одной прямой.

В общем случае решения уравнений (2.4) при произвольных изменениях параметров  $\lambda$  и  $\mu$  и фиксированных значениях остальных параметров можно определить как точки пересечения кривых, заданных на плоскости  $(\xi, \eta)$  уравнениями

$$\begin{aligned} \xi &= f_1(\eta, \nu) = \eta \kappa^{-1} [\nu(1 - \eta^2)^{-1/2} - 1] \\ \eta &= f_2(\xi, \nu, \rho) = \xi [( \nu + \rho)(1 - \xi^2)^{-1/2} - \kappa - \sigma] \end{aligned} \quad (2.5)$$

эквивалентными уравнениям (2.4) в случае  $|\alpha_0| < \pi/2$ ,  $|\vartheta_0| < \pi/2$  при одних и тех же значениях  $\nu$ ,  $\rho$ , где  $\xi = \sin \vartheta_0$ ,  $\eta = \sin \alpha_0$ ,  $\kappa = a/l$ ,  $\nu = g(l\lambda^2)^{-1}$ ,  $\rho = -A_3 \mu (ma\lambda)^{-1}$ ,  $\sigma = (A_1 - A_3)(ma)^{-1}$ .

Однопараметрическое семейство кривых  $\xi = f_1(\eta, \nu)$  подробно исследовано в [2]. Двухпараметрическое семейство кривых  $\eta = f_2(\xi, \nu, \rho)$  имеет общую точку в начале координат  $(0, 0)$ , а также общие асимптоты  $\xi = \pm 1$  для всех значений параметров  $\nu$ ,  $\rho$ , кроме  $\nu = -\rho$ .

Первая производная  $\partial f_2 / \partial \xi = (\nu + \rho)(1 - \xi^2)^{-1/2} - (\kappa + \sigma)$  обращается в нуль при  $(\kappa + \sigma)(1 - \xi^2)^{1/2} = \nu + \rho$ . Отсюда следует, что кривые имеют экстремум в точке  $\xi = 0$  при  $\nu + \rho = \kappa + \sigma$ , а также в точках  $\xi \neq 0$  при  $\nu + \rho < \kappa + \sigma$ ; при  $\nu + \rho > \kappa + \sigma$  они не имеют экстремума. При  $\nu + \rho = 0$  кривые превращаются в прямые  $\eta = -(\kappa + \sigma)\xi$ .

Вторая производная  $\partial^2 f_2 / \partial \xi^2 = 3\xi(1 - \xi^2)^{-3/2}(\nu + \rho)$  равна нулю при  $\xi = 0$ ;

при  $\xi \neq 0$ ,  $\nu + \rho \neq 0$  ее знак определяется знаком величины  $\xi(\nu + \rho)$ , что позволяет сделать заключение о выпуклости или вогнутости кривых этого семейства. С учетом этих замечаний исследование точек пересечения кривых (2.5) и зависимости углов  $\alpha_0$ ,  $\vartheta_0$  от  $\lambda$ ,  $\mu$  можно провести аналогично [2], на чем здесь останавливаться не будем.

Отметим также, что если обратить постановку задачи, т. е. задать величины  $\alpha_0$  и  $\vartheta_0$  так, чтобы имело место равенство

$$\operatorname{tg} \alpha_0 (l \sin \alpha_0 + a \sin \vartheta_0)^{-1} > 0 \quad (2.6)$$

то при заданных положениях струны и оси симметрии тела в вертикальной плоскости  $\lambda^2$  будет равняться величине (2.6), умноженной на  $g$ , а  $\mu$  определится из второго уравнения (2.4) после подстановки в него заданных значений  $\alpha_0$  и  $\vartheta_0$  и найденного значения  $\lambda^2$ .

3. Перейдем к выводу достаточных условий устойчивости стационарных движений твердого тела, подвешенного на струне. Так как для решения (1.7)

$$\partial^2 V / \partial \Omega_i^2 = A_i > 0 \quad (i=1, 2), \quad \partial^2 V / \partial u_j^2 = m > 0 \quad (j=1, 2, 3)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = m \lambda^2 l \left( l + a \frac{\sin \vartheta_0}{\sin^3 \alpha_0} \right), \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \gamma_3} = m a l \lambda^2 \frac{\cos \alpha_0 \cos \vartheta_0}{\sin \alpha_0 \sin \vartheta_0}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \gamma_3^2} = \lambda^2 \left( A_1 + m a^2 + m a l \frac{\sin \alpha_0}{\sin^3 \vartheta_0} \right), \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = m a l \lambda^2 \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \alpha_0}$$

а все другие частные производные второго порядка равны нулю, то условия, необходимые и достаточные для минимума интеграла (1.5), сводятся к неравенствам

$$\sin \alpha_0 \sin \vartheta_0 > 0, \quad A_1 + m a^2 + m a l \frac{\sin \alpha_0 \sin \vartheta_0}{\sin^4 \vartheta_0} > 0$$

$$(A_1 + m a^2) l + a \sin \alpha_0 \sin \vartheta_0 \left( \frac{A_1 + m a^2}{\sin^4 \alpha_0} + \frac{m l^2}{\sin^4 \vartheta_0} \right) +$$

$$+ \frac{m a^2 l (1 - \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta_0)}{\sin^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta_0} > 0,$$

которые выполняются, если выполняется первое из них.

Таким образом, согласно теореме Ляпунова об устойчивости неравенство

$$\sin \alpha_0 \sin \vartheta_0 > 0 \quad (3.1)$$

является достаточным условием устойчивости как перманентных вращений, так и регулярных прецессий симметричного тяжелого твердого тела, подвешенного на струне, по отношению к переменным  $\Omega_i$  ( $i=1, 2$ ),  $u$ , ( $j=1, 2, 3$ ),  $x = -\cos \alpha$ ,  $\gamma_3 = \cos \vartheta$ ,  $y = e \cdot (\mathbf{i}_3 \times \boldsymbol{\gamma}) (1 - \gamma^2)^{-1/2}$ ,  $\omega_3$ . Очевидно, условие (3.1) выполняется для всех точек первого и третьего квадрантов плоскости  $(\xi, \eta)$ , исключая прямые  $\xi=0$ ,  $\eta=0$ .

Устойчивость некоторых из перманентных вращений тяжелого симметричного твердого тела, подвешенного на струне, ранее исследовалась в [3–8].

Отметим, что рассматриваемая задача в частном случае  $l=0$ , когда точка  $O$  совпадает с неподвижной точкой  $O_1$ , превращается в задачу о стационарных движениях тяжелого симметричного тела с неподвижной точкой. Интегралы (1.1) имеют место и при  $l=0$ , однако первые два из них записаны при этом в несколько необычном для тела с неподвижной точкой виде — с явно выделенной скоростью  $\nu$  центра масс. Полагая  $l=0$  в интеграле (1.5), получаем функцию  $V(\Omega_1, \Omega_2, u_1, u_2, u_3, \gamma_3)$ , условия стационарности которой сводятся лишь к шести уравнениям из числа

(1.6), а вместо двух уравнений (1.8) имеем одно уравнение

$$(A_1^* - A_3)\lambda^2 \cos \vartheta_0 = mga, \quad A_1^* = A_1 + ma^2 \quad (3.2)$$

для случая перманентных вращений, и

$$(A_1^* - A_3)\lambda^2 \cos \vartheta_0 - A_3 \mu \lambda = mga \quad (3.3)$$

для случая регулярных прецессий. Уравнения (3.2) и (3.3) записаны в системе координат  $Gx_1 x_2 x_3$ , а если перейти к системе координат с началом в неподвижной точке  $O$  и осями, антипараллельными осям  $x_3$ , то знак величины  $a$  изменится на противоположный и эти уравнения примут общеприятый вид.

Для решения вида (1.7) функция  $V(\Omega_1, \Omega_2, u_1, u_2, u_3, \gamma_3)$  имеет изолированный минимум; отсюда заключаем об устойчивости по отношению к переменным  $\Omega_i$  ( $i=1, 2$ ),  $u_j$  ( $j=1, 2, 3$ ),  $\gamma_3$ ,  $\omega_3$  как перманентных вращений [9], так и регулярных прецессий [10] тяжелого симметричного твердого тела с одной неподвижной точкой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. К динамике твердого тела, подвешенного на струне.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 5–15.
2. Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е. О движении осесимметричного твердого тела, подвешенного на струне.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6, с. 3–16.
3. Морозова Е. П. Об устойчивости вращения твердого тела, подвешенного на струне.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 5, с. 621–626.
4. Темченко М. Е. Об устойчивости одного из положений динамического равновесия одной механической системы.— Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 1, с. 50–52.
5. Скимель В. Н. О движении гиростата, подвешенного на струне.— Тр. межвуз. конф. по прикл. теор. устойчивости движения и аналитической механике. Казань, 1964, с. 118–122.
6. Возлинский В. И. О бифуркации стационарных движений консервативных систем с двумя циклическими координатами.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 5, с. 841–847.
7. Темченко М. Е. Об исследовании критериев устойчивости движения подвешенного на струне твердого тела и волчка при наличии у них эллипсоидальной полости, наполненной жидкостью.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1, с. 26–31.
8. Рубановский В. П. Анализ условий устойчивости равномерного вертикального вращения динамически симметричного твердого тела, подвешенного на нити.— Современные вопросы математики и механики и приложения: Сб. статей. М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1983, с. 16–21.
9. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., астрон., физ., хим., 1957, № 4, с. 9–16.
10. Меркин Д. Р. Гироскопические системы. М.: Гостехтеориздат, 1956. 299 с.

Москва

Поступила в редакцию  
20.II.1985